

*Носов Михаил Александрович
Семенов Кирилл Александрович*

Физика цунами

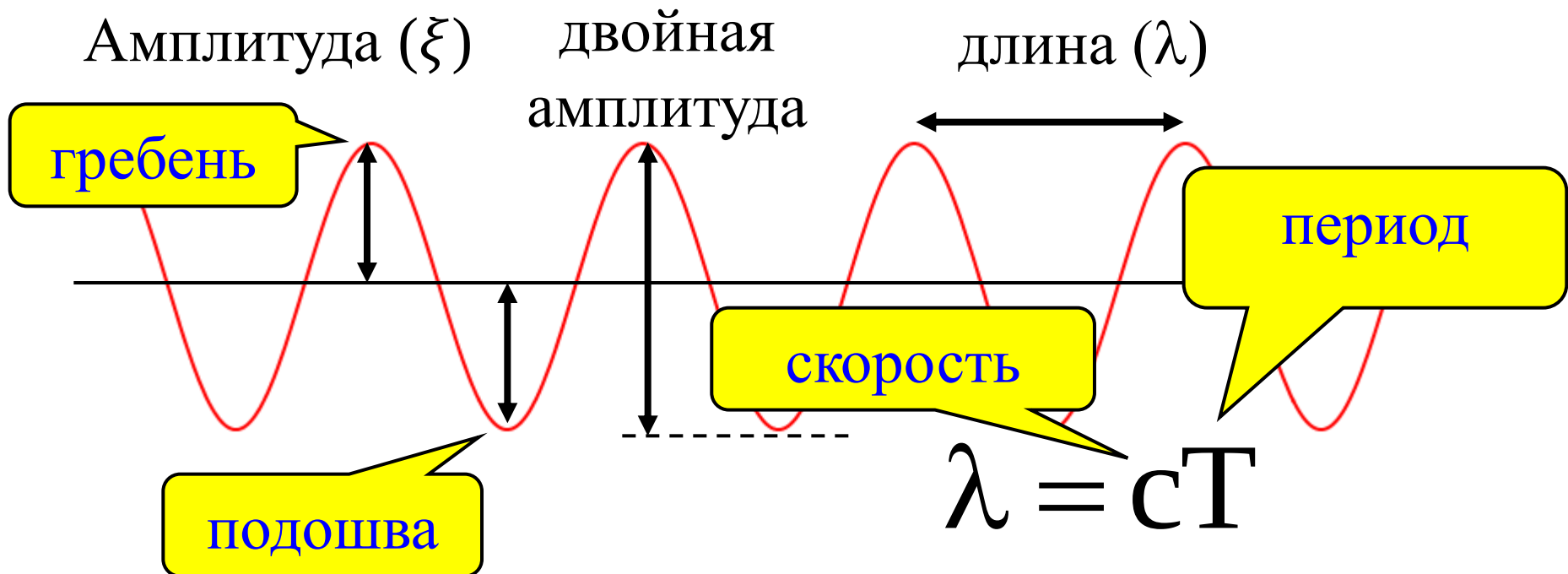
*Межфакультетский учебный курс Московского государственного
университета имени М.В.Ломоносова*

Лекция №6



Волны – процесс распространения колебаний в пространстве

[Школьный учебник физики]



Математические подходы

I. Алгебраические уравнения

ищем числовое значение переменной x

Уравнение:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

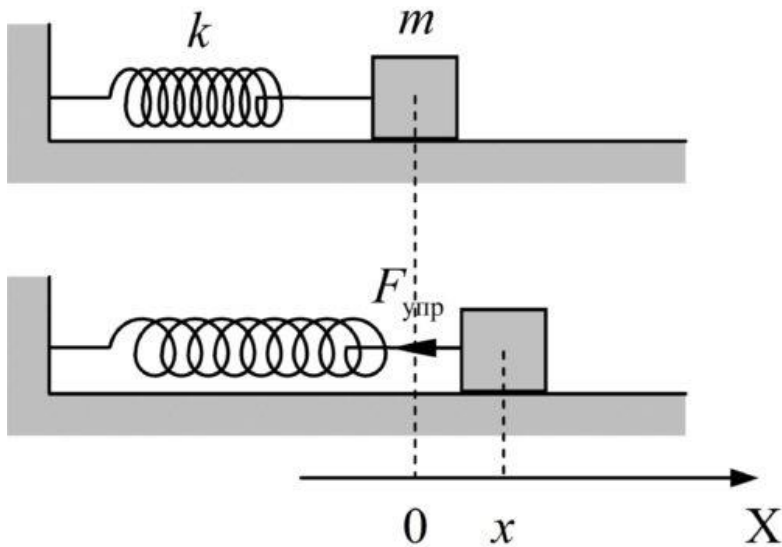
Его решение:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Математические подходы

II. Дифференциальные уравнения

ищем функцию $x(t)$ – зависимость координаты грузика от времени



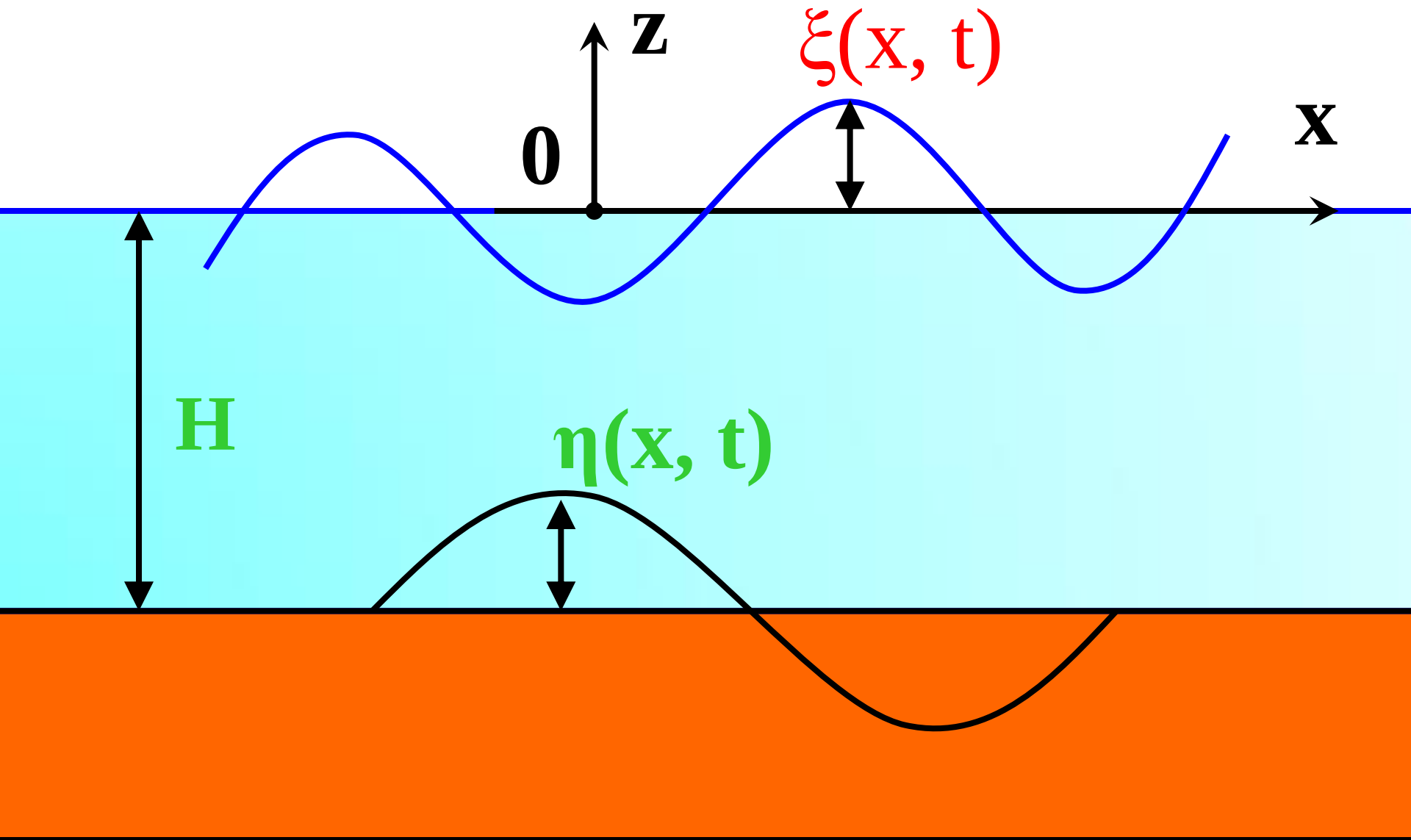
Уравнение:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

Его решение:

$$x(t) = a \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0\right)$$

Простейшая задача о генерации цунами



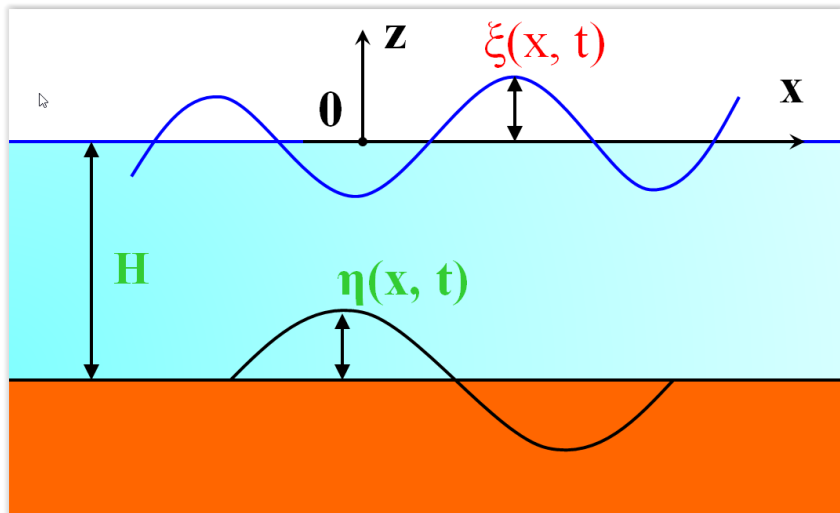
Математические подходы

III. Дифференциальные уравнения в частных производных

ищем функцию от **двух** переменных $\xi(x, t)$ – зависимость смещения поверхности воды от координаты и времени

Уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} - gH \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2}$$



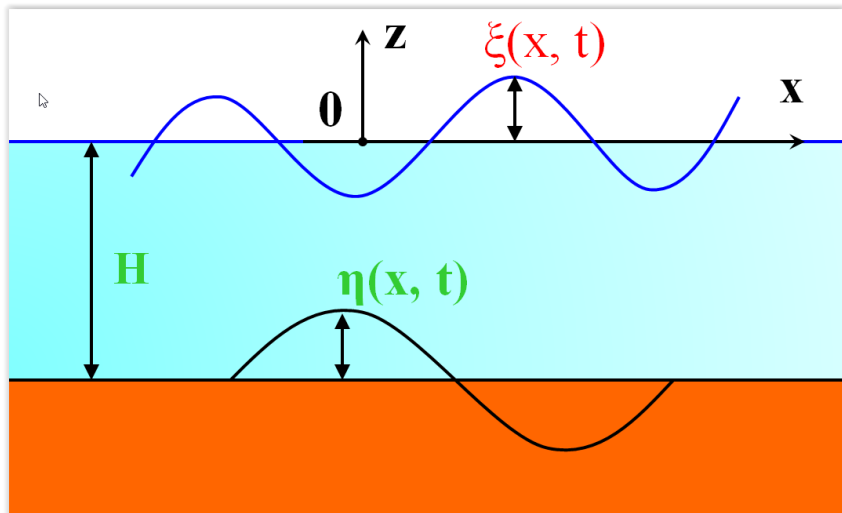
Математические подходы

Дифференциальные уравнения в частных производных

ищем функцию от **двух** переменных $\xi(x, t)$ – зависимость смещения поверхности воды от координаты и времени

Его решение:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{gH}} \int_0^t \int_{x-\sqrt{gH}(t-\hat{t})}^{x+\sqrt{gH}(t-\hat{t})} \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} d\hat{x} d\hat{t}$$



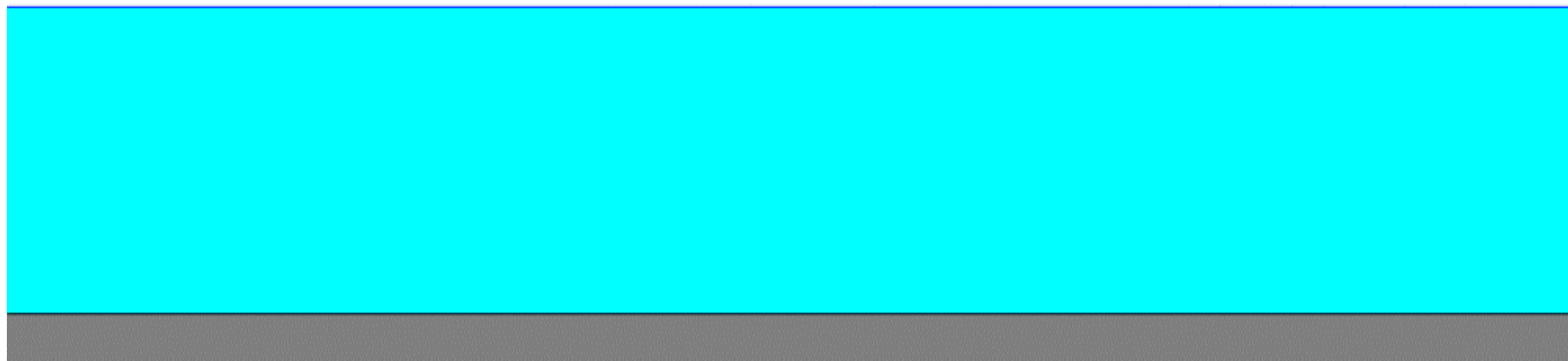
$$\text{При } t = 0: \xi = 0, \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

Визуализация решения

$\eta(x, t)$ = прямоугольная подвижка дна с
остаточным смещением

Время деформации дна - 20 с

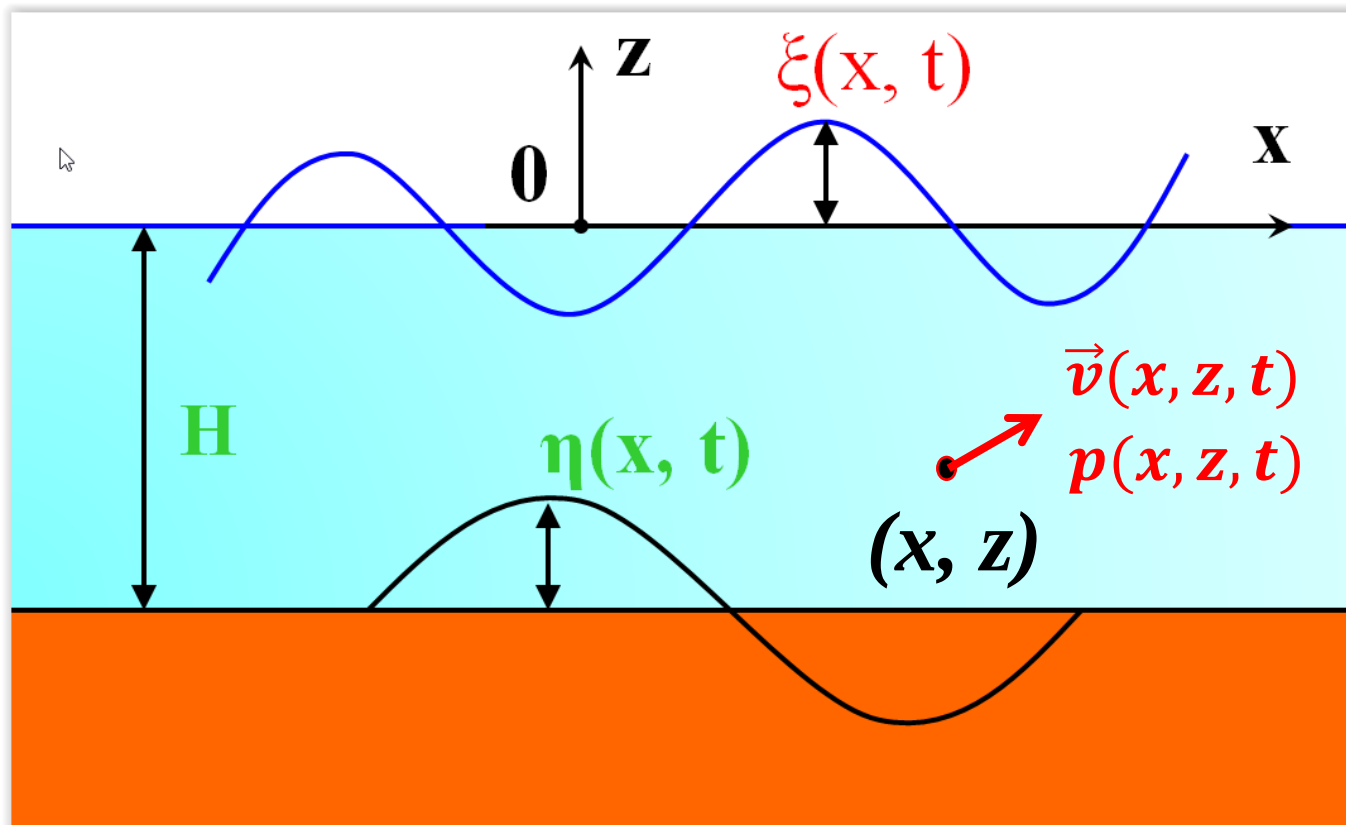
$H=4000$ m, $a=20000$ m, $\tau=20$ s, time=0 s



Математические подходы

IV. Система дифференциальных уравнений в частных производных

ищем *несколько* неизвестных функций от *нескольких* переменных: $\xi(x, t)$, $p(x, z, t)$, $\vec{v}(x, z, t)$ – зависимости смещения поверхности воды, давления и скорости течения во всех точках от координат и времени

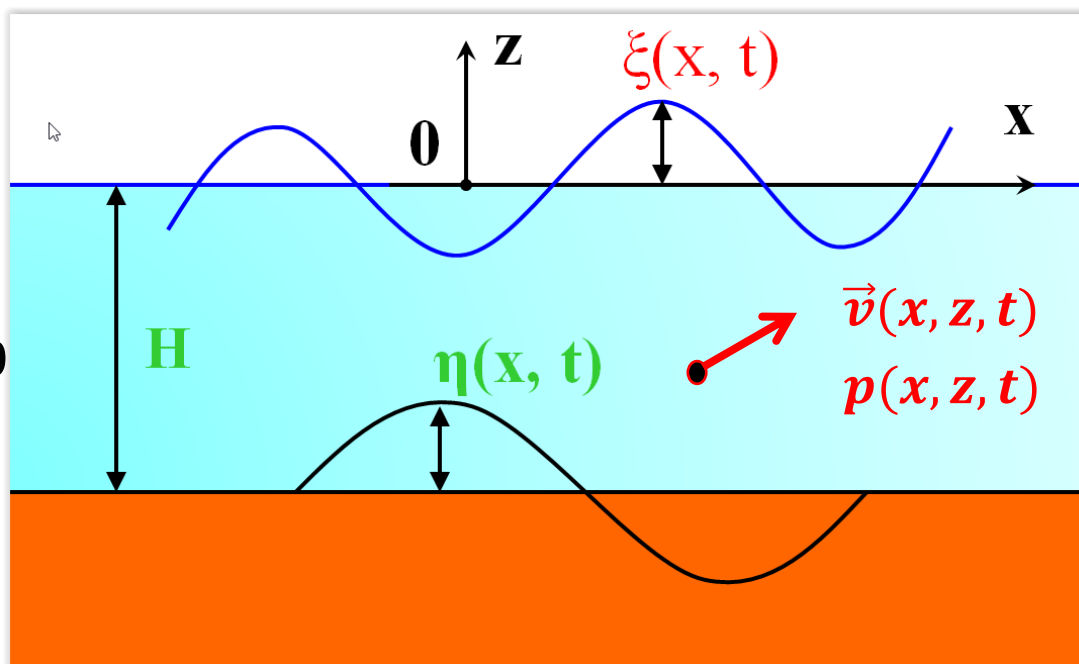


Математические подходы

IV. Система дифференциальных уравнений в частных производных

ищем **несколько** неизвестных функций от **нескольких** переменных: $\xi(x, t)$, $p(x, z, t)$, $\vec{v}(x, z, t)$ – зависимости смещения поверхности воды, давления и скорости течения во всех точках от координат и времени

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \\ z = 0: \frac{\partial \xi}{\partial t} = v_z, p = p_{\text{атм}} \\ z = -H: v_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{array} \right.$$



Математические подходы

IV. Система дифференциальных уравнений в частных производных

ищем **несколько** неизвестных функций от **нескольких** переменных: $\xi(x, t)$, $p(x, z, t)$, $\vec{v}(x, z, t)$ – зависимости смещения поверхности воды, давления и скорости течения во всех точках от координат и времени

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \\ z = 0: \frac{\partial \xi}{\partial t} = v_z, p = p_{\text{атм}} \\ z = -H: v_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{array} \right.$$

Если считать жидкость **несжимаемой и невязкой**, Землю **невращающейся**, а волны – **маленькими**, то все неизвестные функции можно выразить через одну – **потенциал течения** $F(x, z, t)$!!!

$$v_x = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$v_z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$p = -\rho \frac{\partial F}{\partial t}$$

Математические подходы

IV. Система дифференциальных уравнений в частных производных

ищем *несколько* неизвестных функций от *нескольких* переменных: $\xi(x, t)$, $p(x, z, t)$, $\vec{v}(x, z, t)$ – зависимости смещения поверхности воды, давления и скорости течения во всех точках от координат и времени

Если считать жидкость *несжимаемой и невязкой*, Землю *невращающейся*, а волны – *маленькими*, то все неизвестные функции можно выразить через одну – *потенциал течения* $F(x, z, t)$!!!

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \\ z = 0: \frac{1}{g} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ z = -H: \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$v_x = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$v_z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$p = -\rho \frac{\partial F}{\partial t}$$

Математические подходы

IV. Система дифференциальных уравнений в частных производных

ищем *несколько* неизвестных функций от *нескольких* переменных: $\xi(x, t)$, $p(x, z, t)$, $\vec{v}(x, z, t)$ – зависимости смещения поверхности воды, давления и скорости течения во всех точках от координат и времени

Решение системы:

$$\xi = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p^2 \exp(pt - ikx)}{\operatorname{ch}(kH) [gk \operatorname{th}(kH) + p^2]} H(p, k)$$

$$u = \frac{1}{4\pi^2} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p \exp(pt - ikx) \operatorname{ch}(kz) [gk - p^2 \operatorname{th}(kz)]}{\operatorname{ch}(kH) [gk \operatorname{th}(kH) + p^2]} H(p, k)$$

$$w = -\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p \exp(pt - ikx) \operatorname{ch}(kz) [gk \operatorname{th}(kz) - p^2]}{\operatorname{ch}(kH) [gk \operatorname{th}(kH) + p^2]} H(p, k)$$

где

$$H(p, k) = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-pt + ikx) \eta(x, t)$$

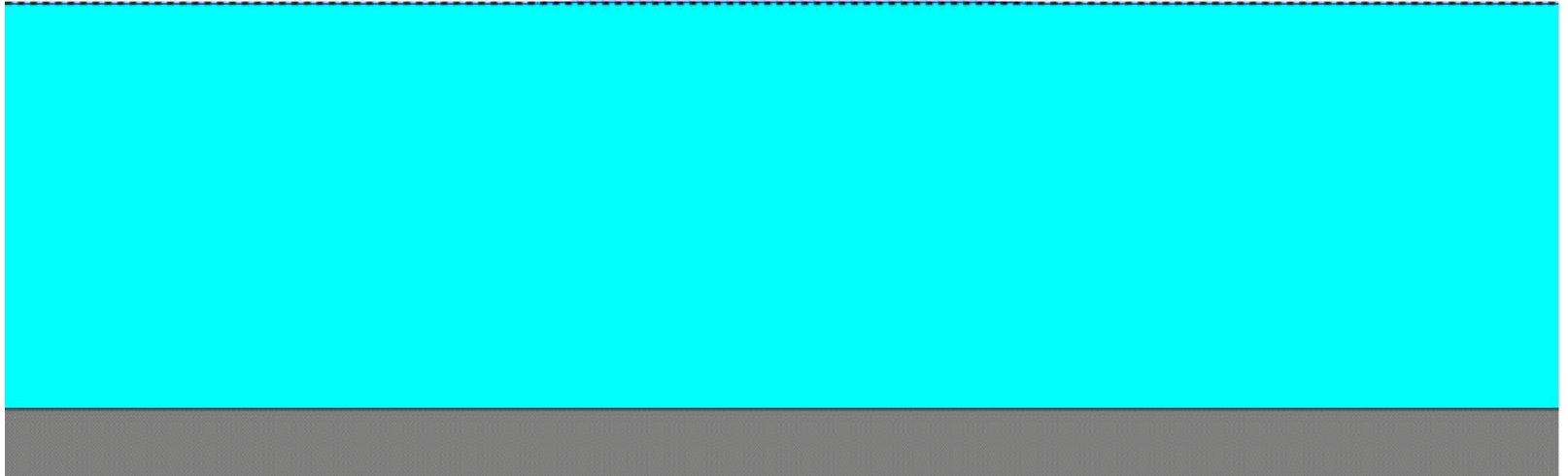
Визуализация решения

$\eta(x, t)$ = прямоугольная подвижка дна с остаточным смещением

Горизонтальная протяженность подвижки – 60 км

Время деформации дна - 10 с

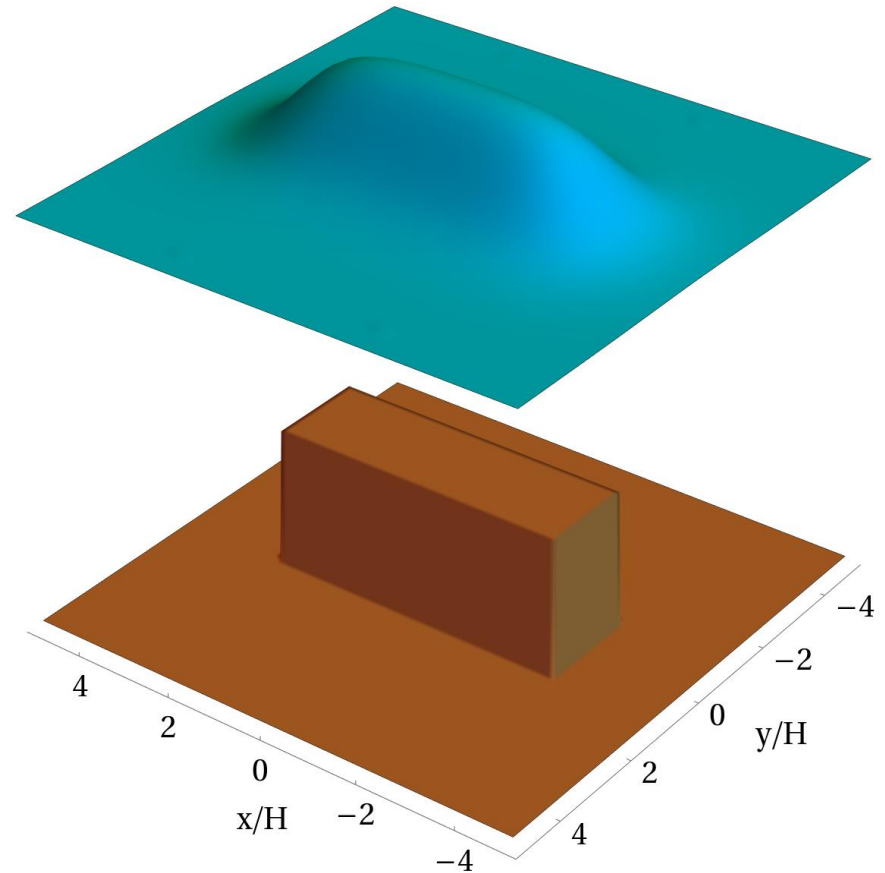
$H=4000$ m, $a=60000$ m, $\tau=10$ s, time=0 s



При больших размерах источника теория длинных волн и потенциальная теория дают близкий результат

**Сглаживающий эффект
водного слоя открыт и
подробно исследован
Каджиурой. Исследование
опубликовано в 1963 году.**

**[Kajiura K. The leading wave of
a tsunami //
Bulletin of the Earthquake
Research Institute.
1963. V. 41. N 3. P. 535–571]**



Математические подходы

IV. Система дифференциальных уравнений в частных производных

ищем **несколько** неизвестных функций от **нескольких** переменных: $\xi(x, t)$, $p(x, z, t)$, $\vec{v}(x, z, t)$ – зависимости смещения поверхности воды, давления и скорости течения во всех точках от координат и времени

Система:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \\ z = 0: \frac{1}{g} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ z = -H: \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$v_x = \frac{\partial F}{\partial x} \quad v_z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t} \quad p = -\rho \frac{\partial F}{\partial t}$$

Решение системы:

$$\xi = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p^2 \exp(pt - ikx)}{\text{ch}(kH) [gk \text{th}(kH) + p^2]} H(p, k)$$

$$u = \frac{1}{4\pi^2} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p \exp(pt - ikx) \text{ch}(kz) [gk - p^2 \text{th}(kz)]}{\text{ch}(kH) [gk \text{th}(kH) + p^2]} H(p, k)$$

$$w = -\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p \exp(pt - ikx) \text{ch}(kz) [gk \text{th}(kz) - p^2]}{\text{ch}(kH) [gk \text{th}(kH) + p^2]} H(p, k)$$

где

$$H(p, k) = \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-pt + ikx) \eta(x, t)$$

Математические подходы

V. Численные методы (для реальных событий)

*В реальности: дно океана не плоское, а деформация дна не прямоугольная!
Поэтому невозможно получить решение системы в виде формулы. На
помощь приходят численные методы. Но система остается прежней!*

Система:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \\ z = 0: \frac{1}{g} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ z = -H: \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$v_x = \frac{\partial F}{\partial x} \quad v_z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

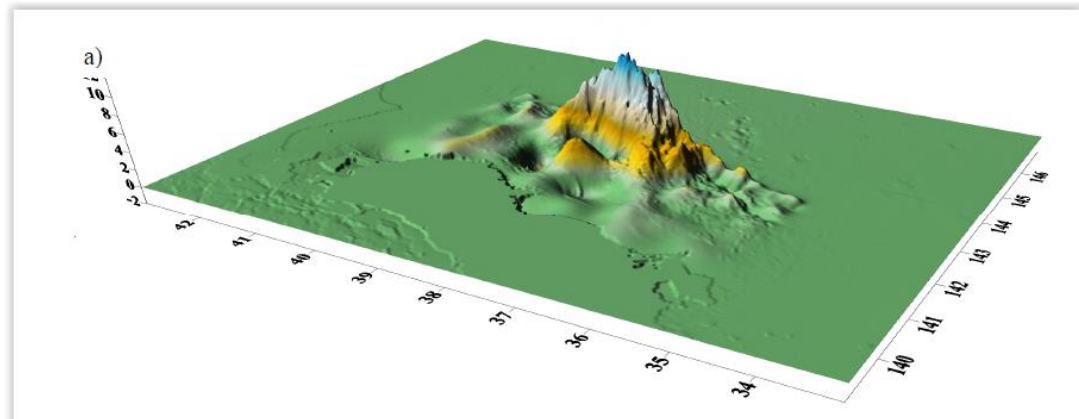
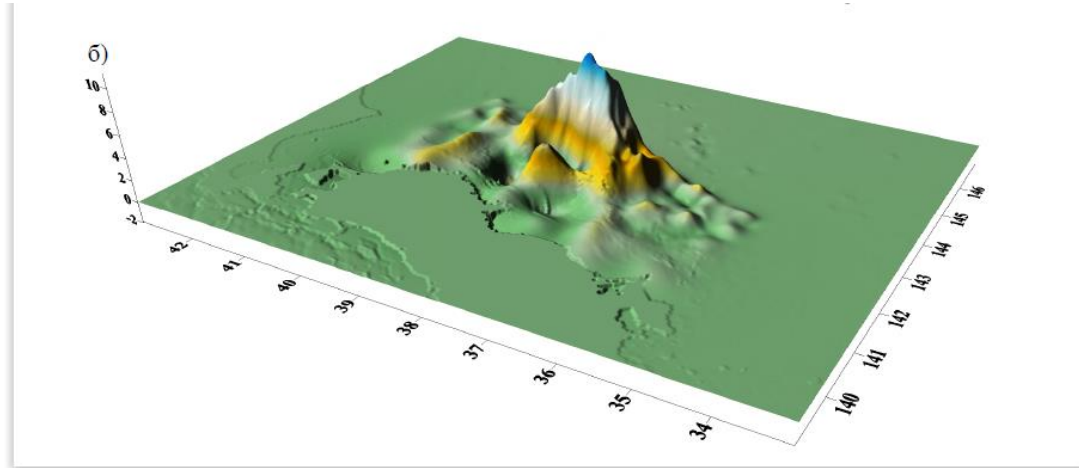
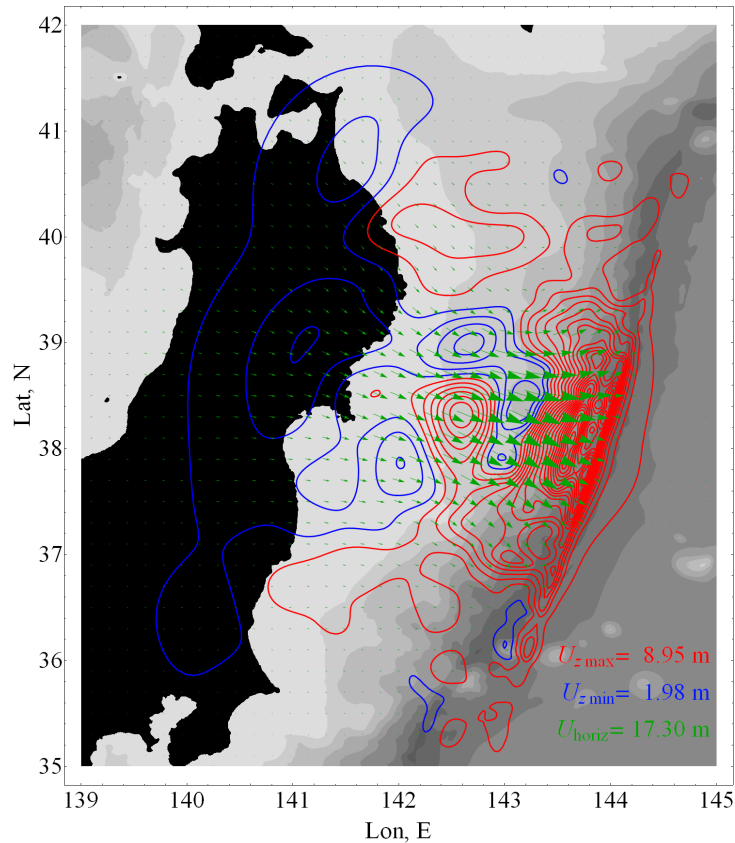
$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t} \quad p = -\rho \frac{\partial F}{\partial t}$$

Решение системы:

~~$$\xi = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p^2 \exp(pt - ikx)}{\operatorname{ch}(kH) [gk \operatorname{th}(kH) + p^2]} H(p, k)$$
$$u = \frac{1}{4\pi^2} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p \exp(pt - ikx) \operatorname{ch}(kz) [gk - p^2 \operatorname{th}(kz)]}{\operatorname{ch}(kH) [gk \operatorname{th}(kH) + p^2]} H(p, k)$$
$$w = -\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p \exp(pt - ikx) \operatorname{ch}(kz) [gk \operatorname{th}(kz) - p^2]}{\operatorname{ch}(kH) [gk \operatorname{th}(kH) + p^2]} H(p, k)$$
где
$$H(p, k) = \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-pt + ikx) \eta(x, t)$$~~

численные методы

Пример применения численных методов для расчета начального возвышения океана в очаге цунами Тохоку 11.03.2011 (Япония)



Пример применения численных методов для расчета начального возвышения океана в очаге цунами Тохоку 11.03.2011 (Япония)

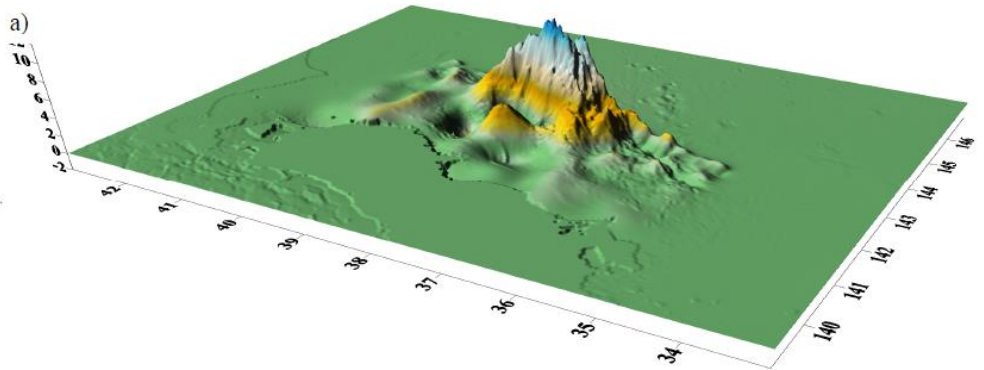
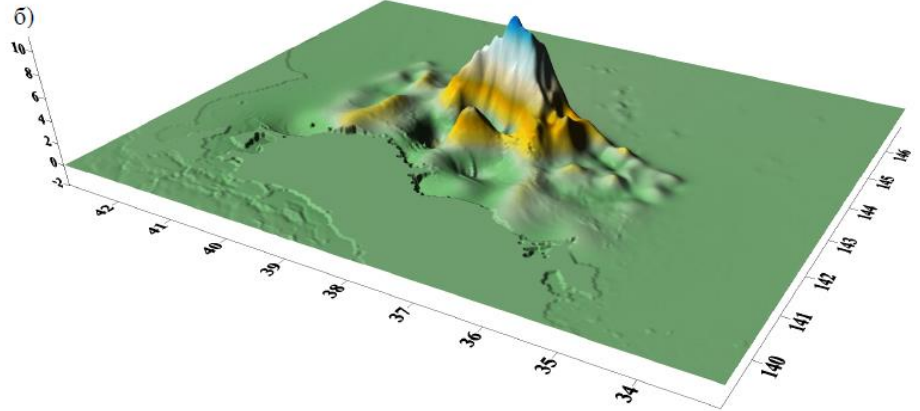
Le Petit Prince



*Mon dessin ne représentait pas un chapeau. Il représentait
un serpent boa qui digérait un éléphant*



*J'ai alors dessiné
l'intérieur du serpent boa, afin que les grandes personnes puissent
comprendre. Elles ont toujours besoin d'explications*



Базовые свойства волн

- **Дисперсия**
- **Рефракция (преломление)**
- **Дифракция (огибание препятствий)**

Базовые свойства волн

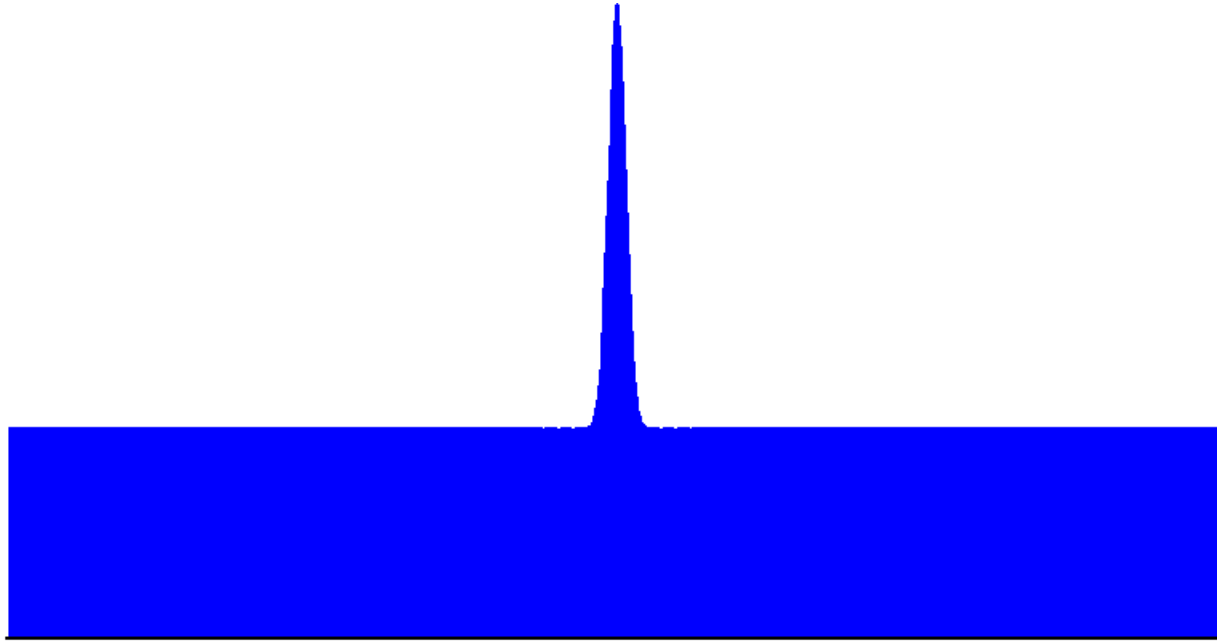
- **Дисперсия**
- **Рефракция (преломление)**
- **Дифракция (огибание препятствий)**

Дисперсия – зависимость скорости волны от ее длины

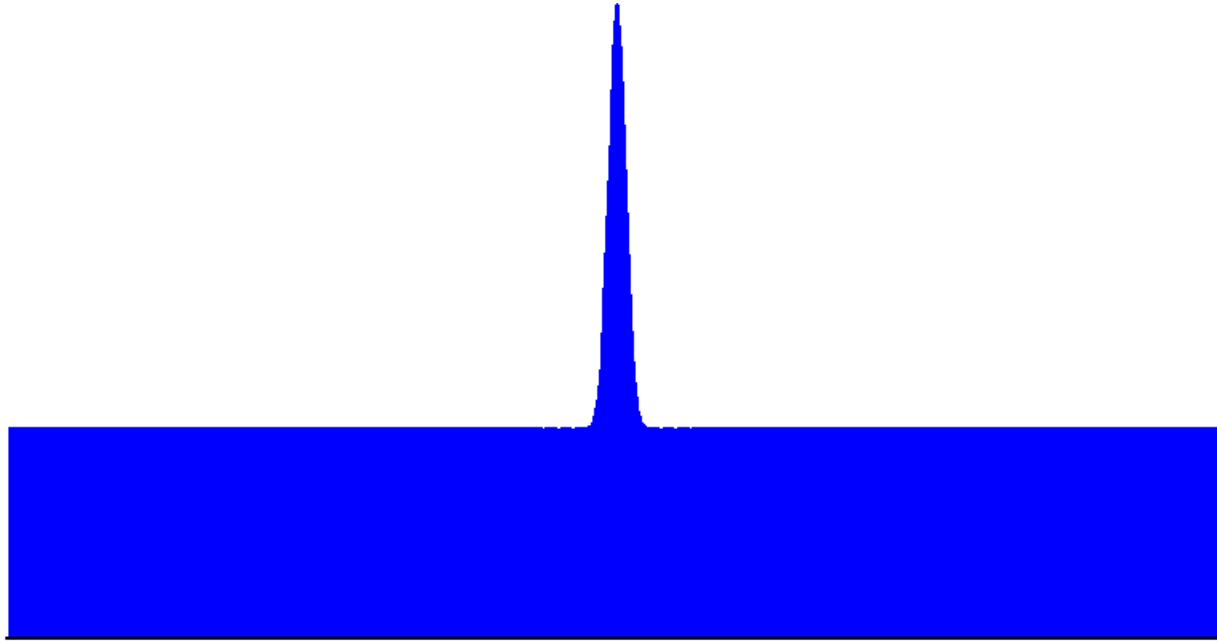
**Нормальная дисперсия – длинные волны
бегут быстрее коротких**

**Аномальная дисперсия – короткие волны
бегут быстрее длинных**

Эволюция начального возвышения в среде без дисперсии (длинные волны)



Эволюция начального возвышения в среде с нормальной дисперсией

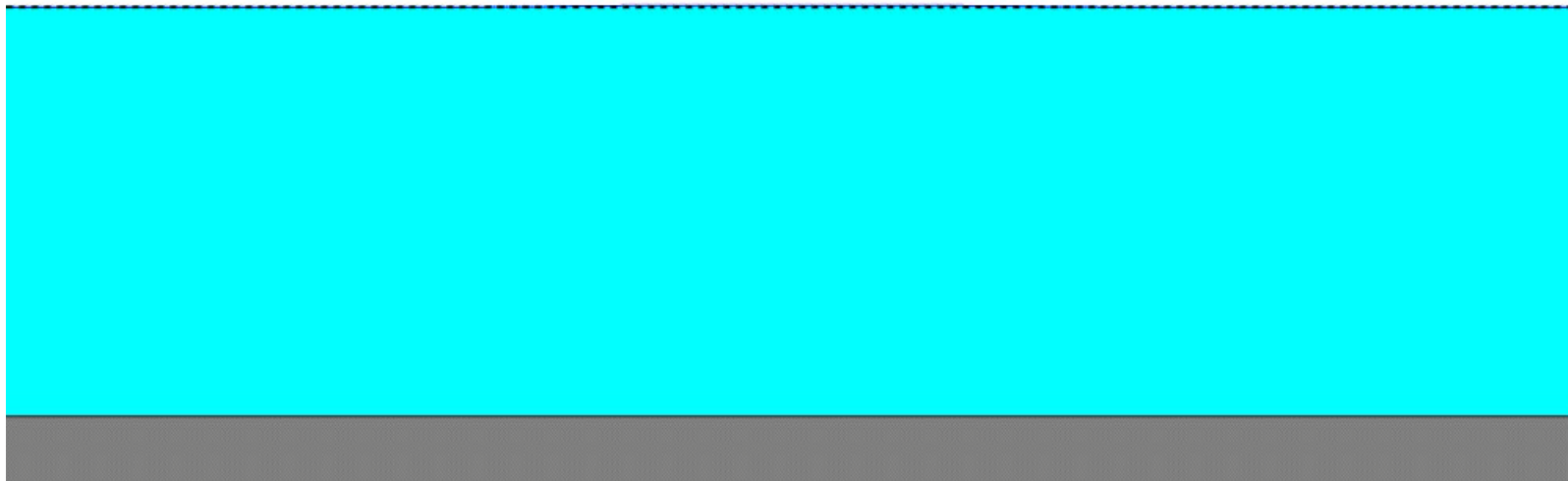


Визуализация решения

$\eta(x, t)$ = прямоугольная подвижка дна с
остаточным смещением

Время деформации дна - 10 с

$H=4000$ m, $a=20000$ m, $\tau=10$ s, time=0 s



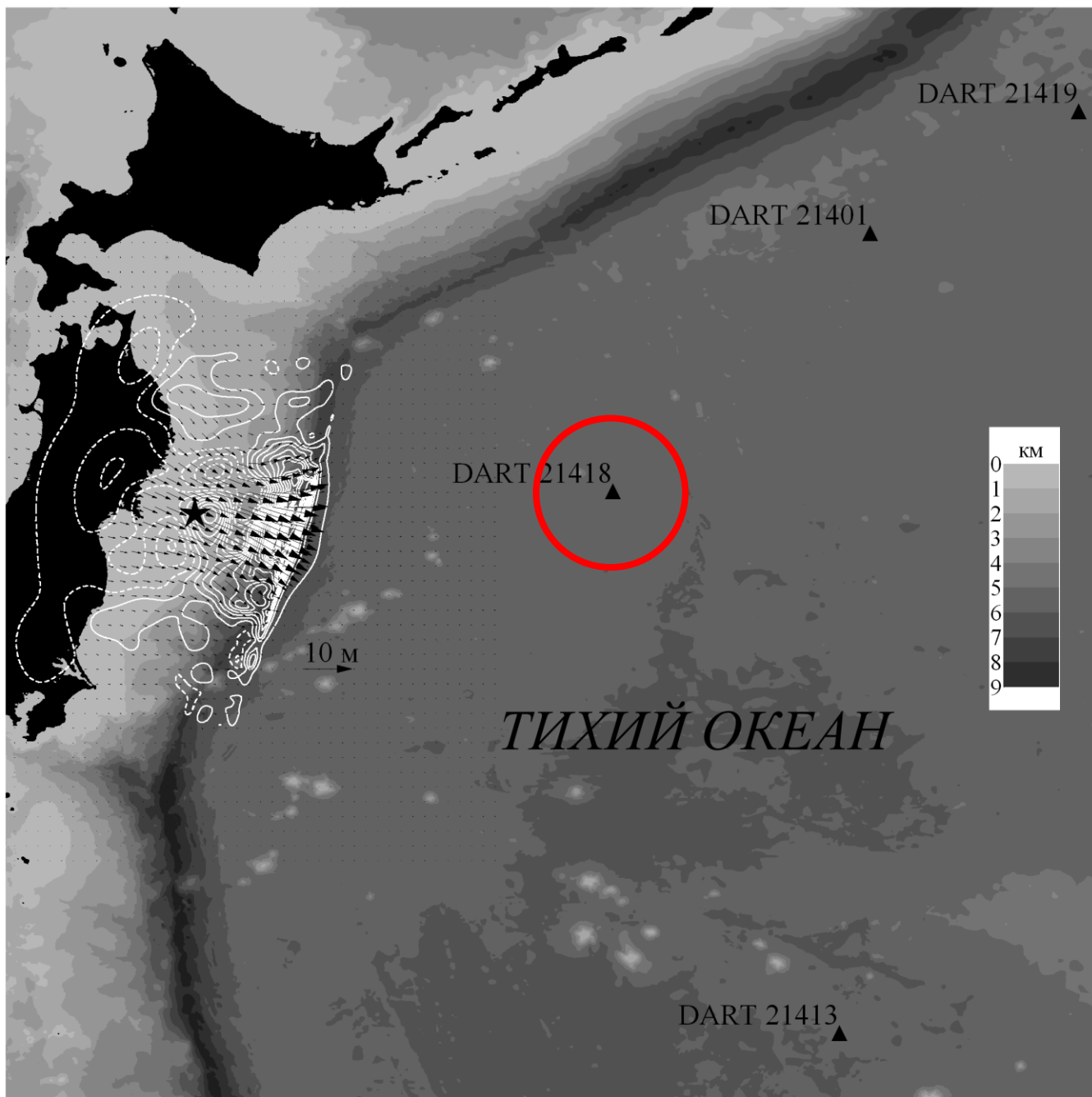
С.Ш.

45°

40°

35°

30°



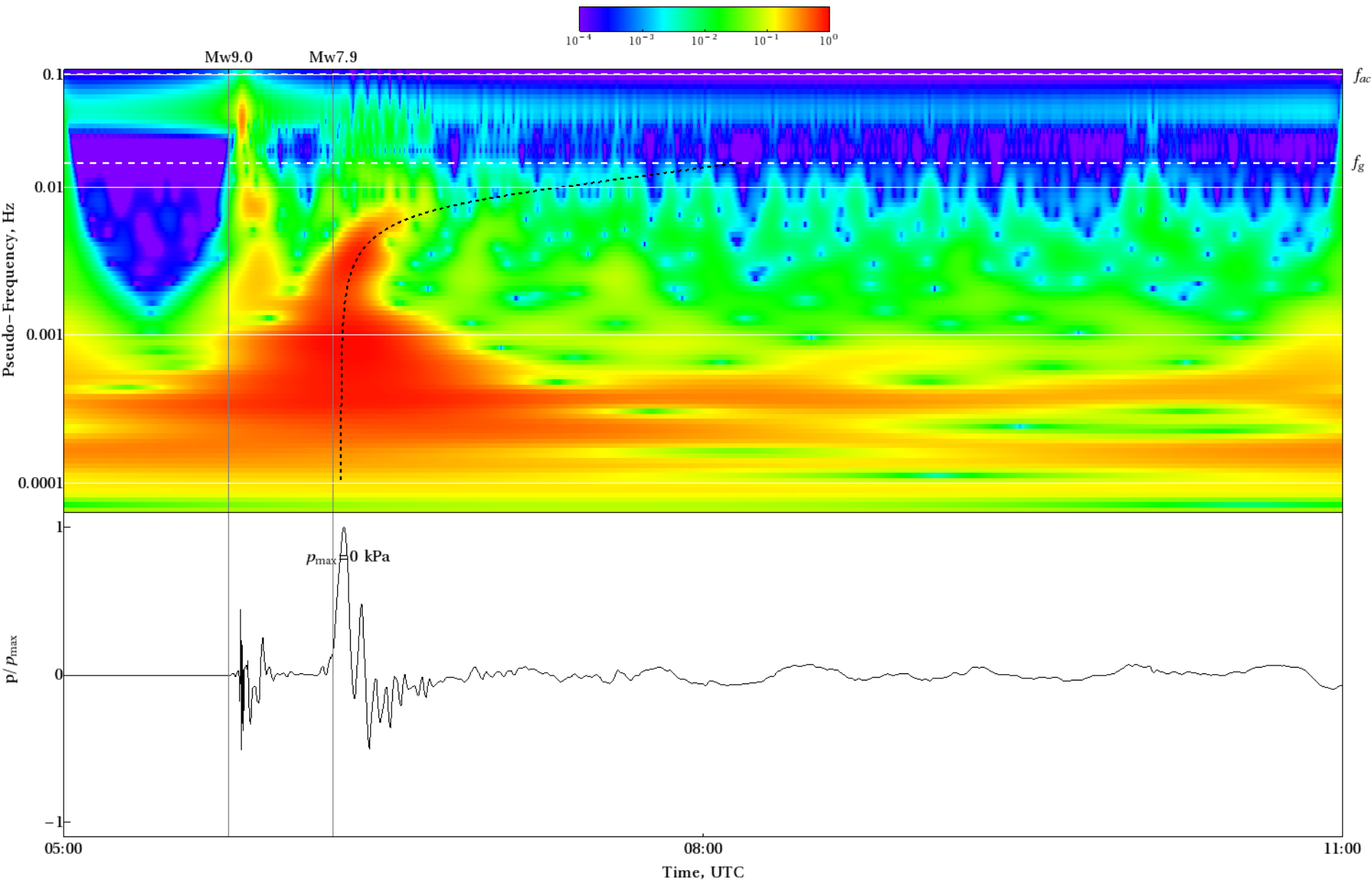
140°

145°

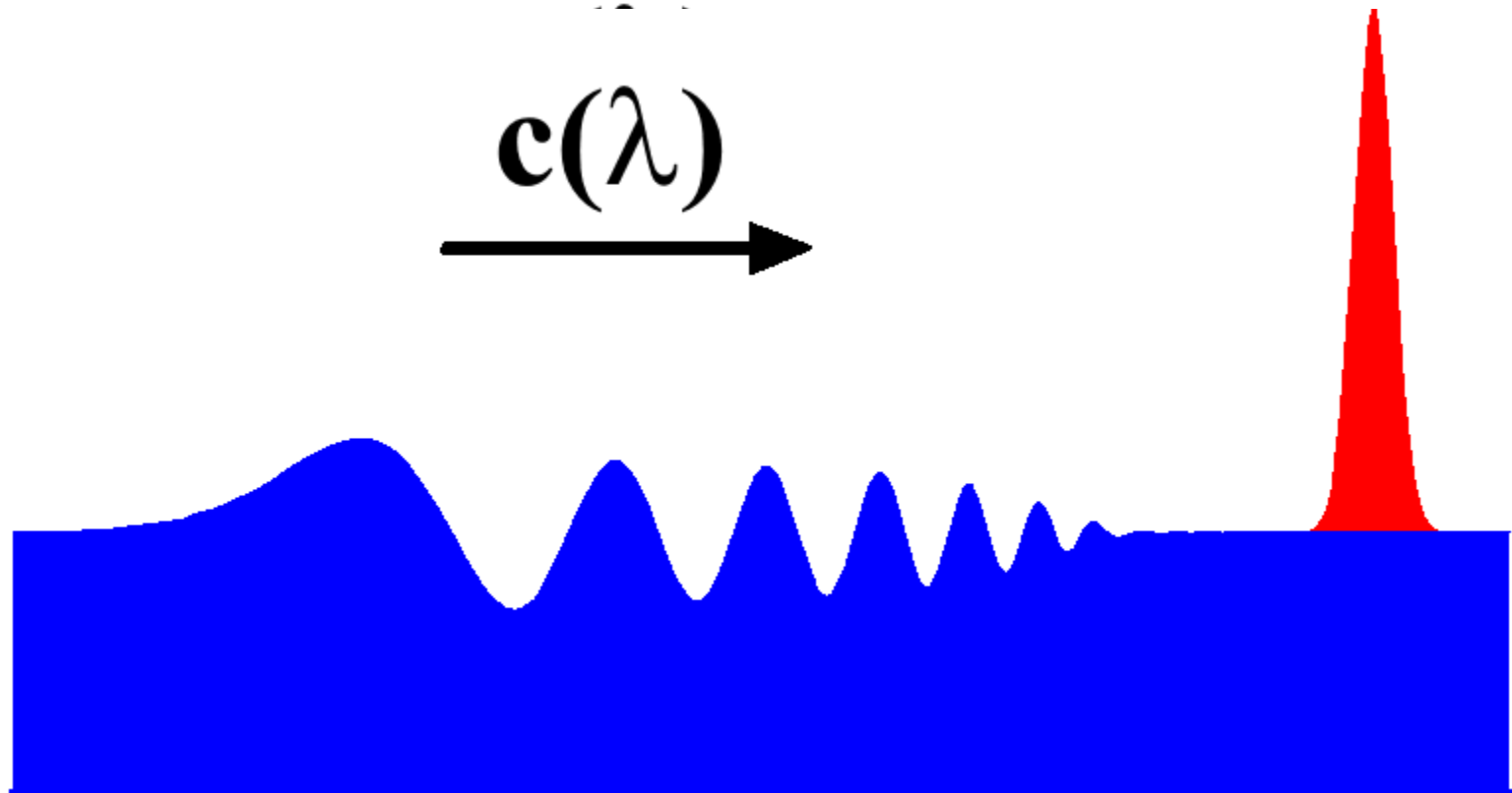
150°

155° В.Д.

DART21418



Дисперсионная фокусировка (усиление) –
один из ВОЗМОЖНЫХ механизмов
формирования волн-убийц



Базовые свойства волн

- **Дисперсия**
- **Рефракция (преломление)**
- **Дифракция (огибание препятствий)**

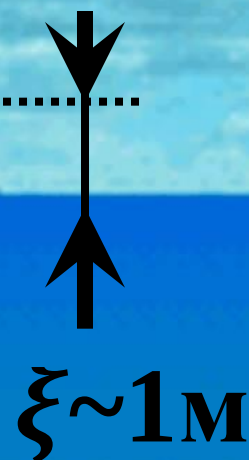
**Смотри,
волна
цунами!
!**



**А я не вижу
никакой
волны!!!**



$$\lambda = 100 - 1000 \text{ км}$$



$$\xi \sim 1 \text{ м}$$

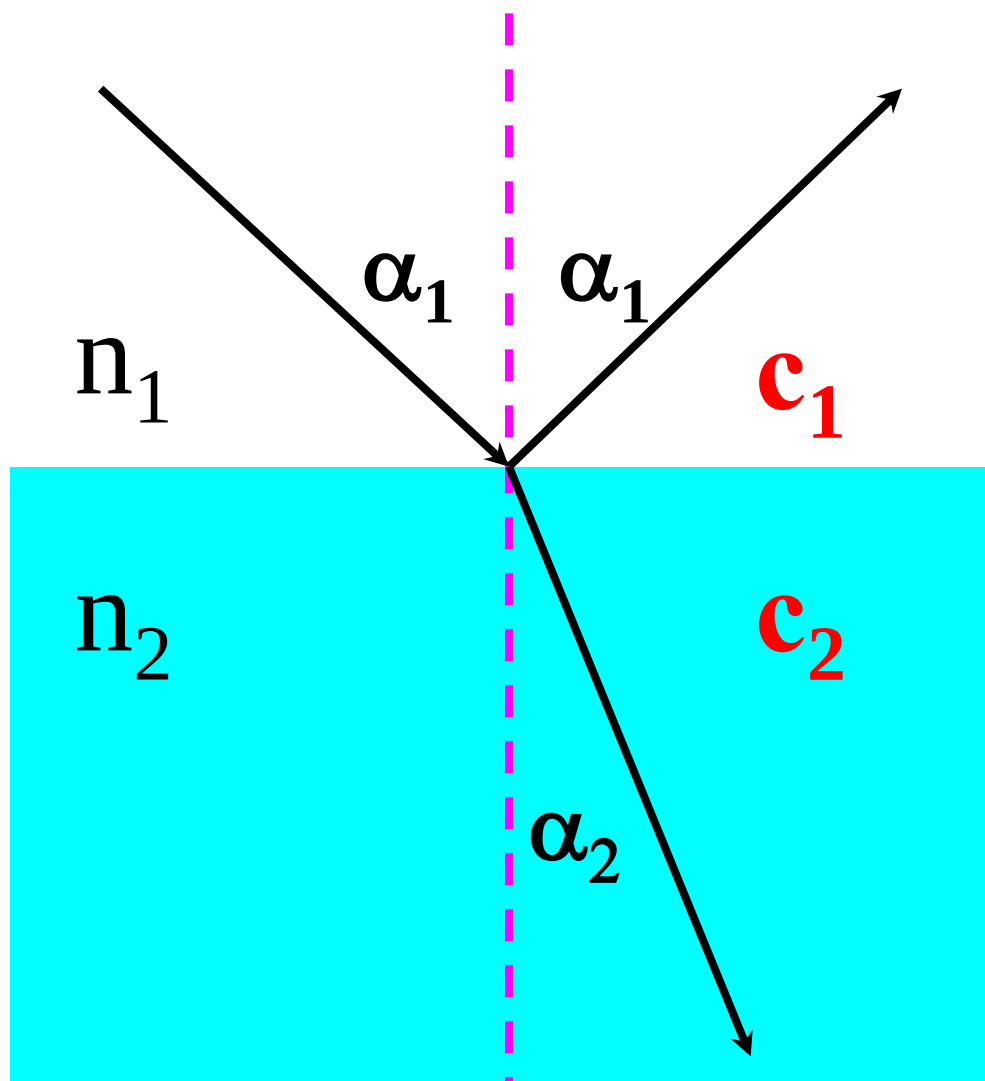
$$H \approx 4 \text{ км}$$

$$C = \sqrt{gH} \approx 200 \text{ км/ч}$$

**Рефракция (преломление) –
зависимость скорости
распространения волны от глубины
океана**

**Благодаря рефракции гребни волн всегда
выходят на берег параллельно береговой
линии!!!**

Закон Снеллиуса

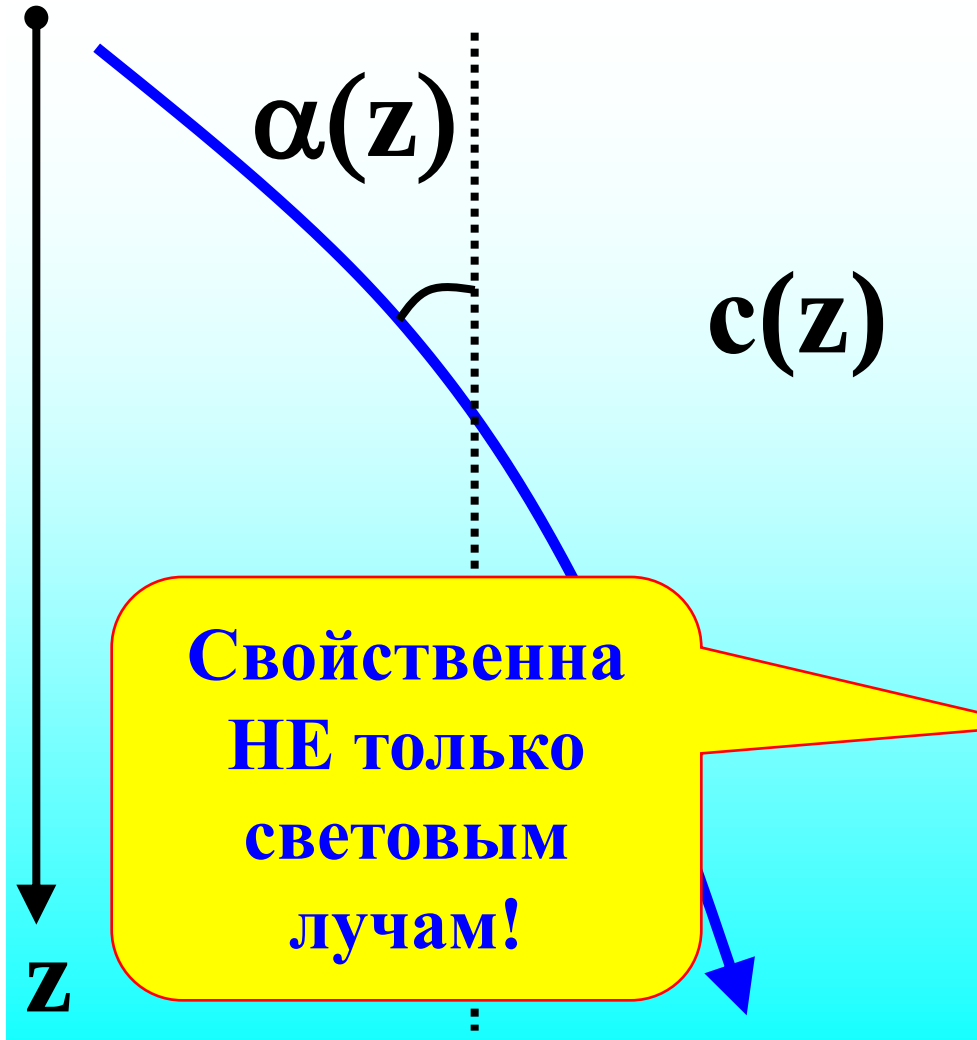


$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n = c_0 / c$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

3. Рефракция иус



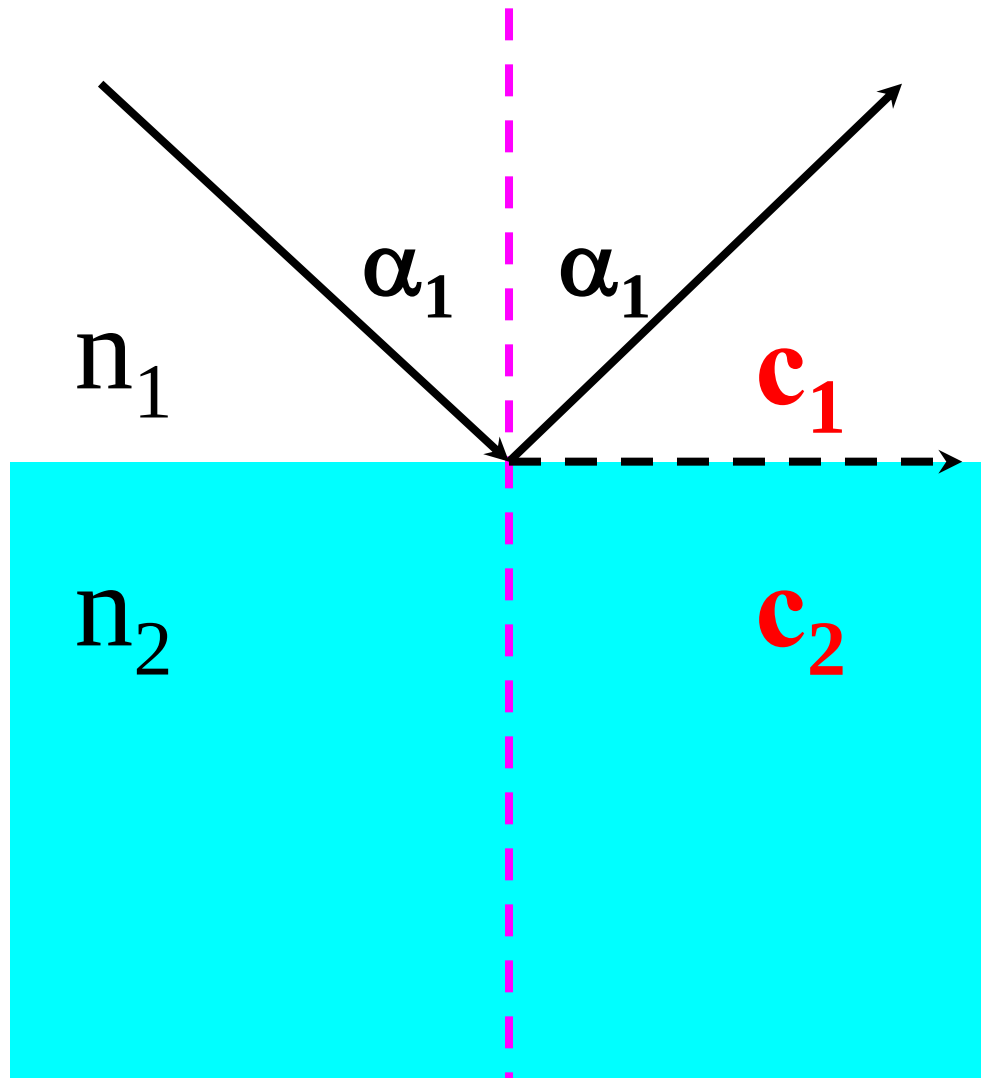
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\sin \alpha_2 \quad c_2$$

$$\frac{\sin \alpha(z)}{c(z)} = \text{const}$$

Рефракция – изменение направления волновых лучей в среде с (плавно) изменяющейся в пространстве скоростью

Полное внутреннее отражение



$$n_2 < n_1$$

$$c_2 > c_1$$

Полное внутреннее отражение

$$\frac{dc}{dz} > 0$$

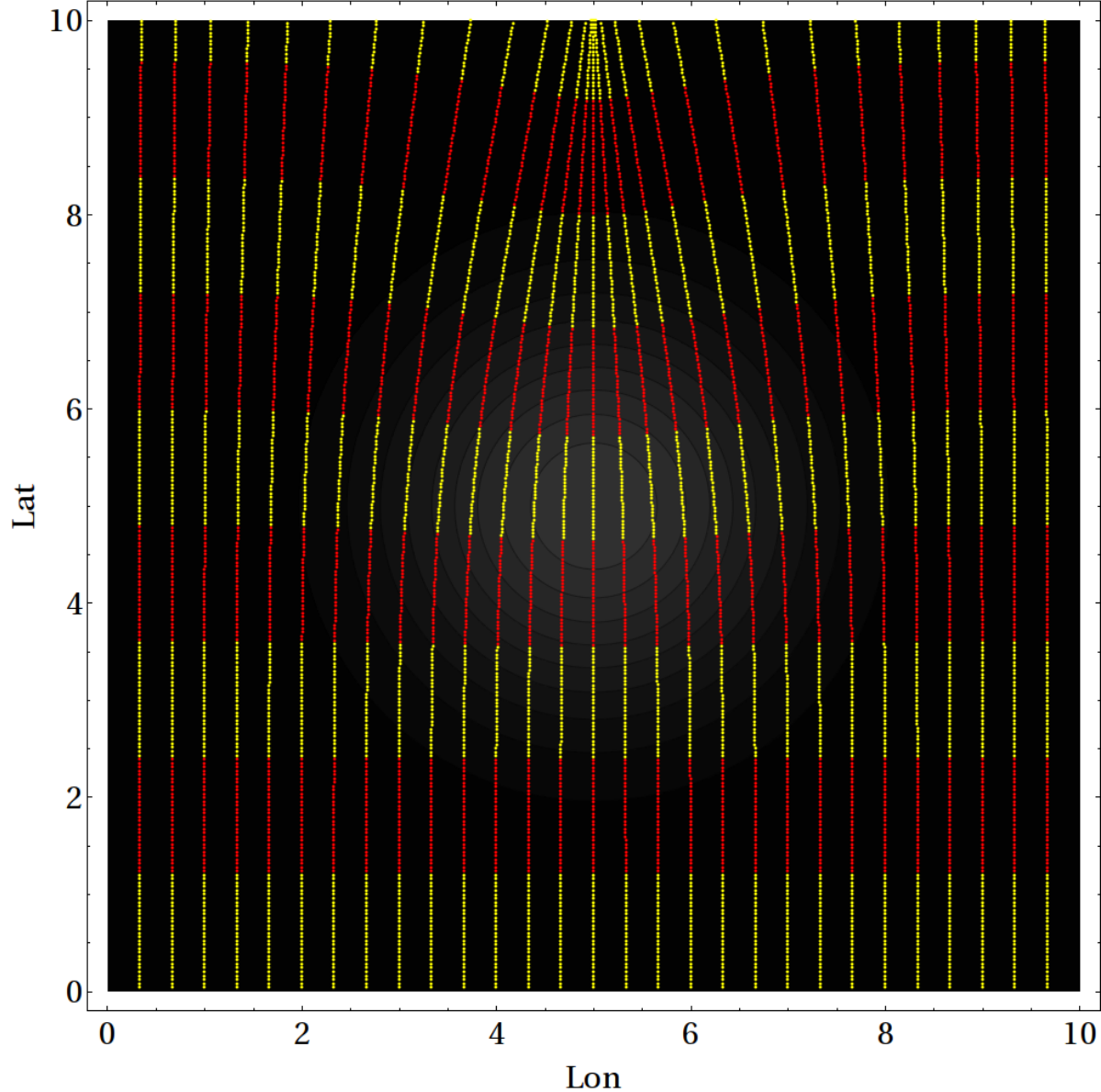


**отражение лучей от
высокоскоростных областей**

Ход волновых лучей над подводной возвышенностью

$H = 5000 \text{ m}$

$dH = 1000 \text{ m}$

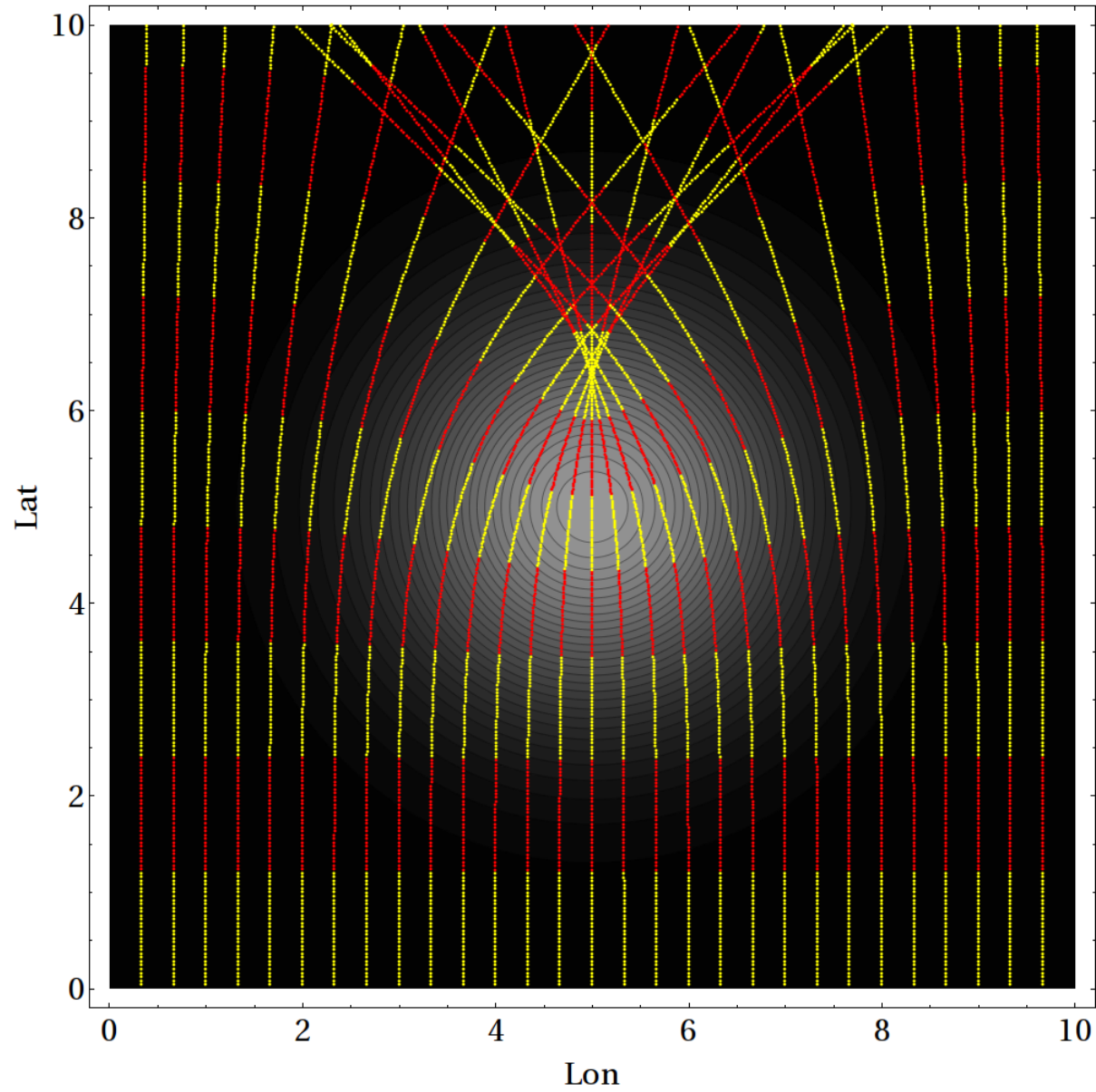


Ход волновых лучей над подводной

ВОЗВЫШЕННОСТЬЮ

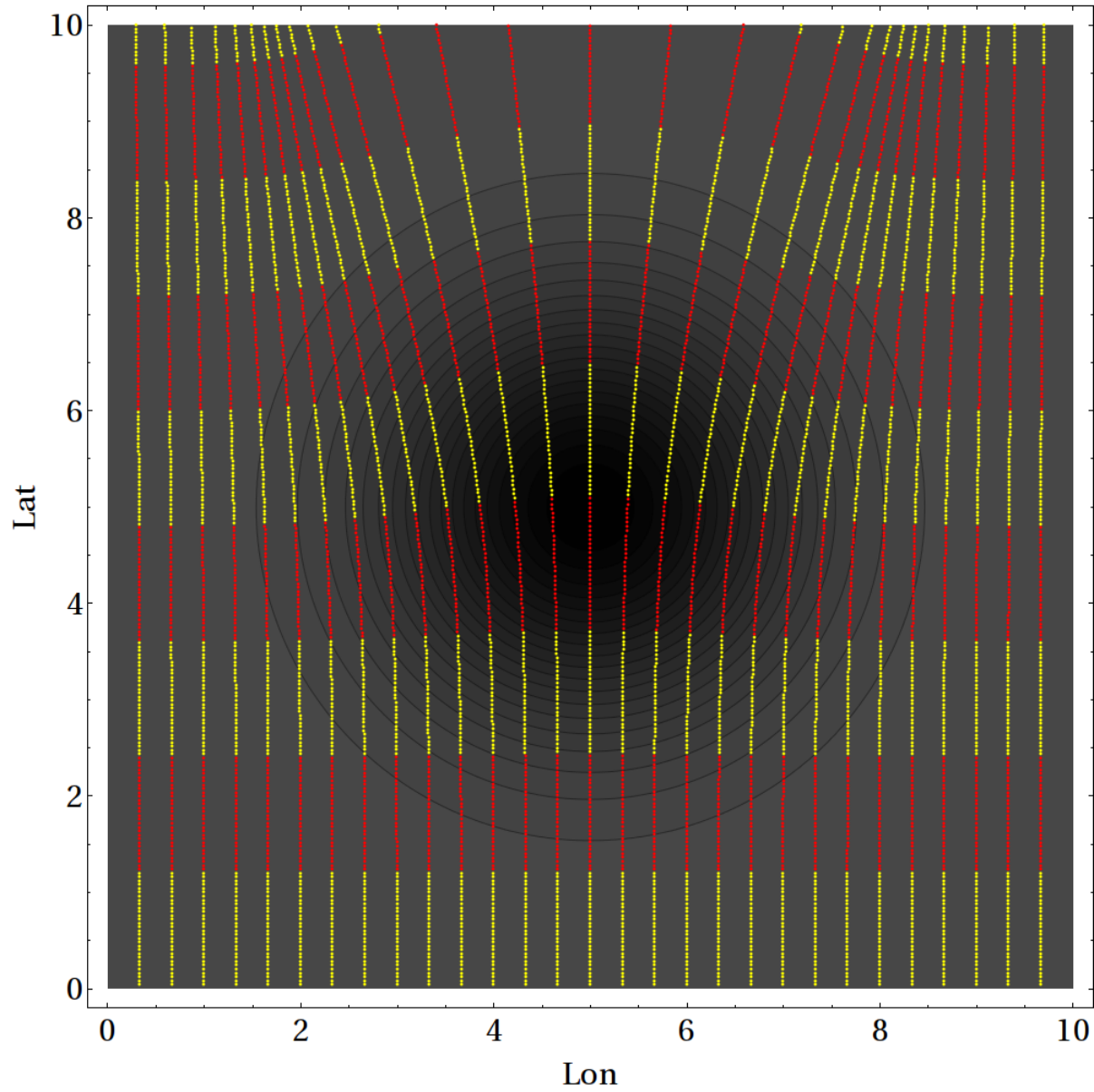
H = 5000 m

dH = 3000 m



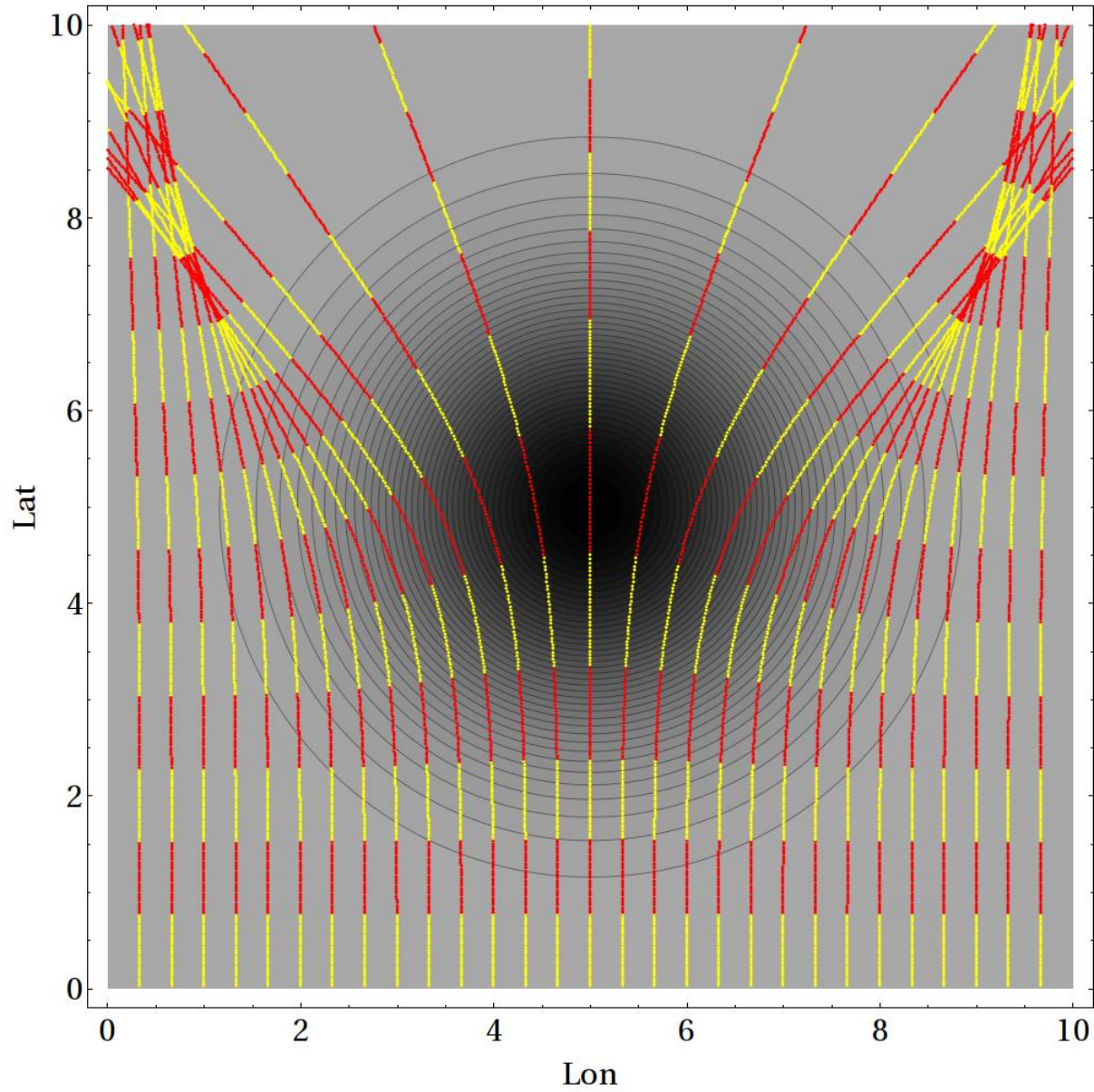
Ход волновых лучей над подводной депрессией

$H = 5000 \text{ m}$ $dH = -2000 \text{ m}$



Ход волновых лучей над подводной депрессией

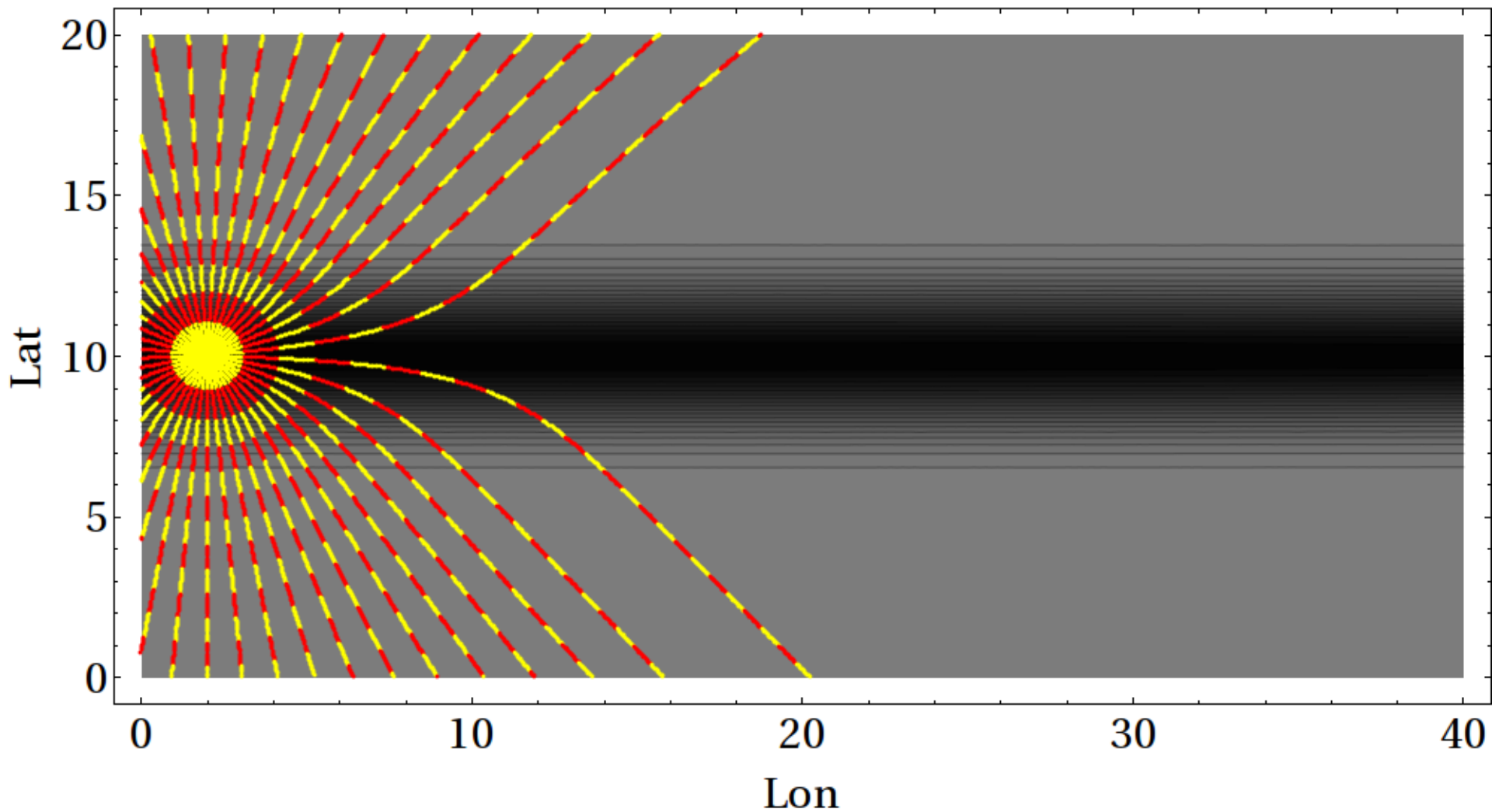
$H = 2000 \text{ m}$ $dH = -4000 \text{ m}$



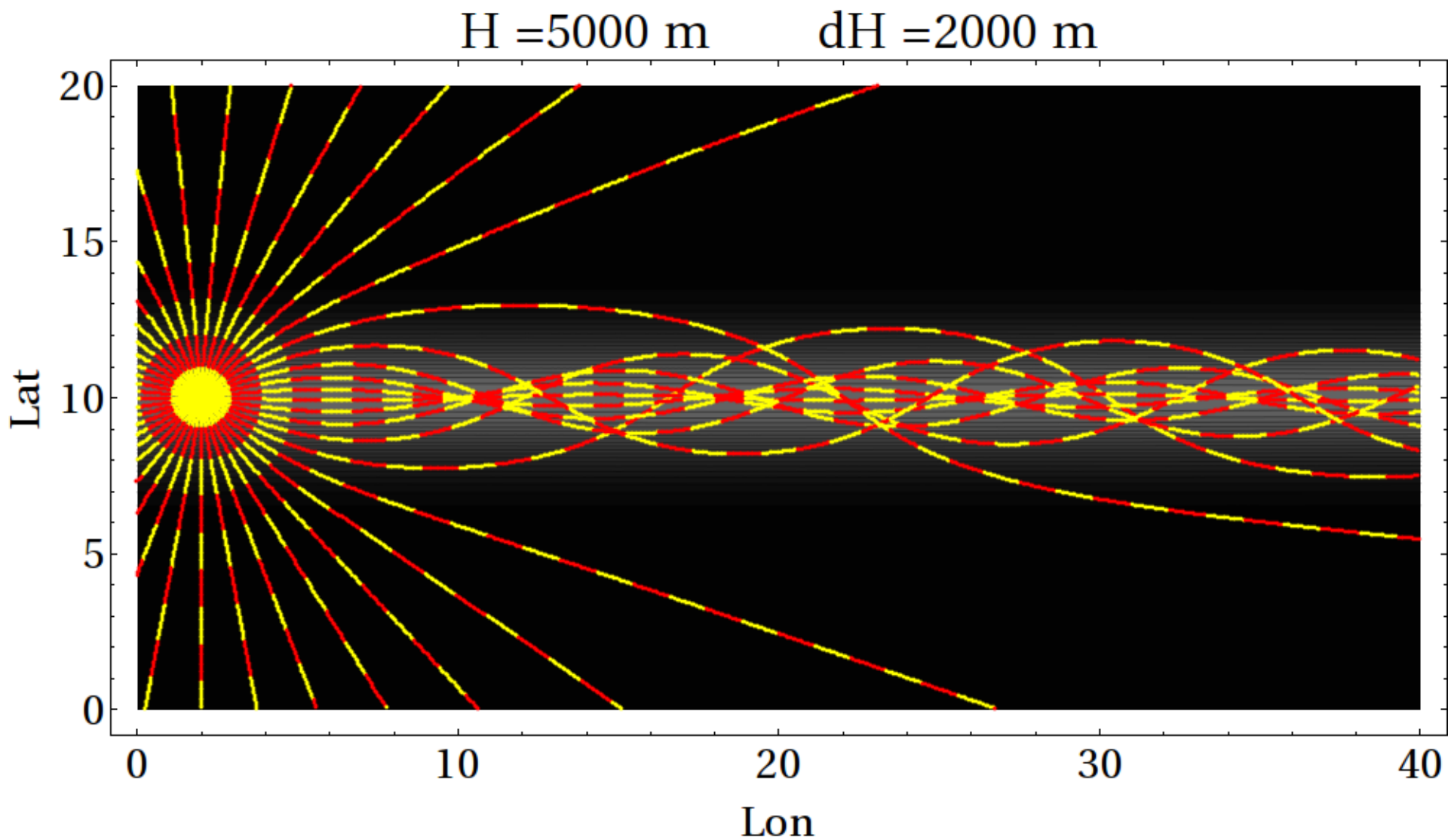
Ход волновых лучей вблизи глубоководного желоба

$H = 2000 \text{ m}$

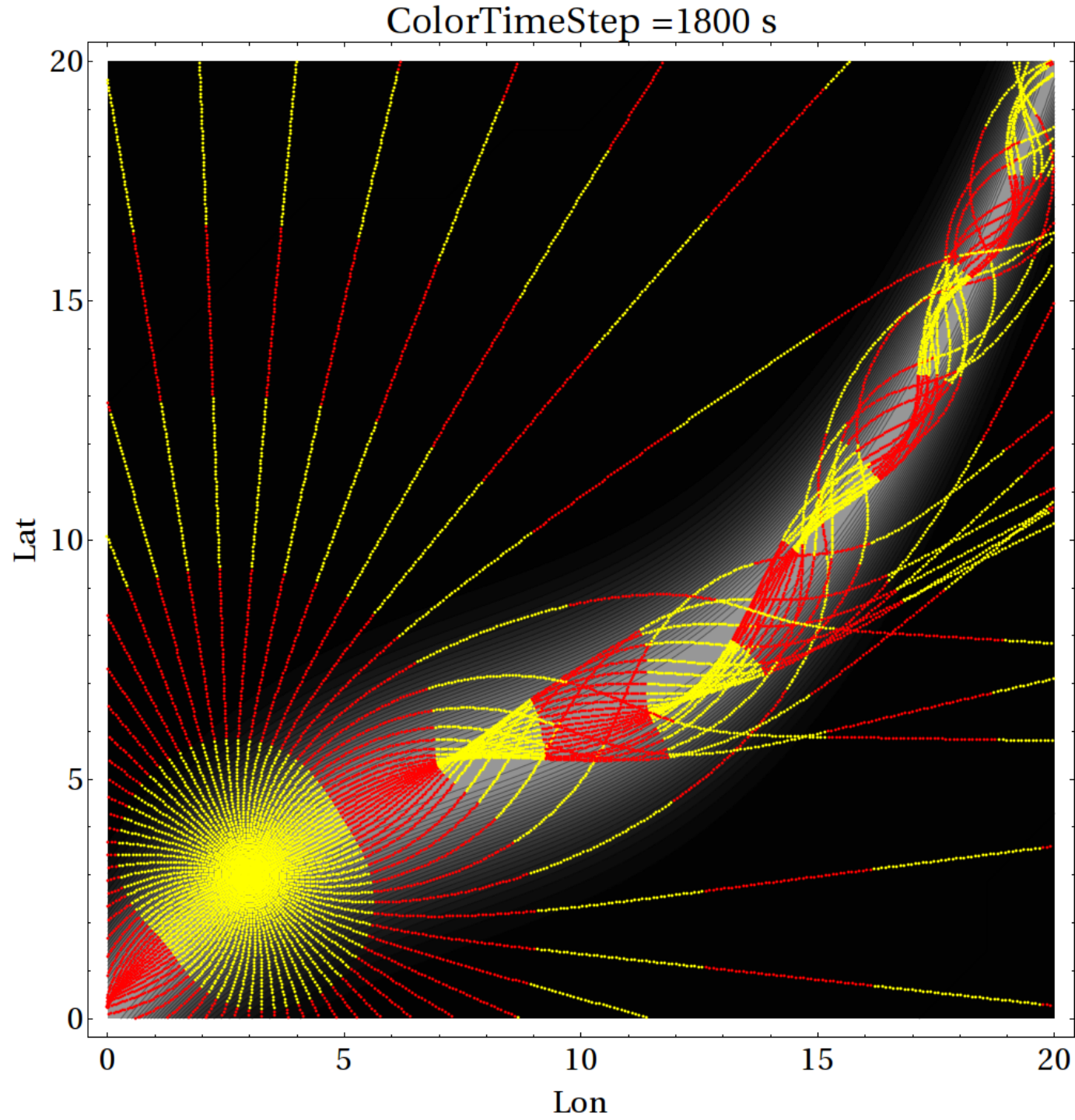
$dH = -2000 \text{ m}$



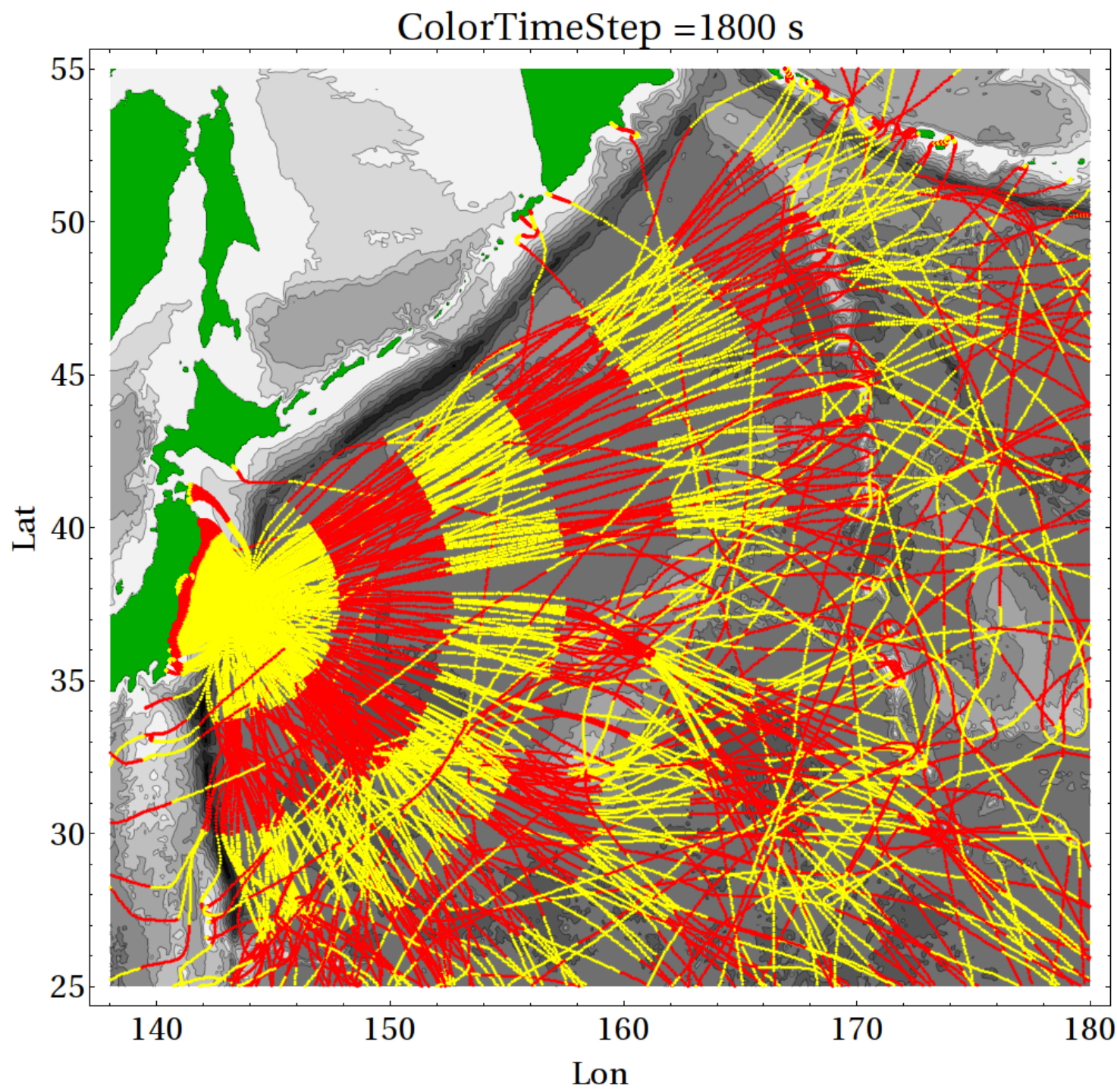
Ход волновых лучей вблизи подводного хребта



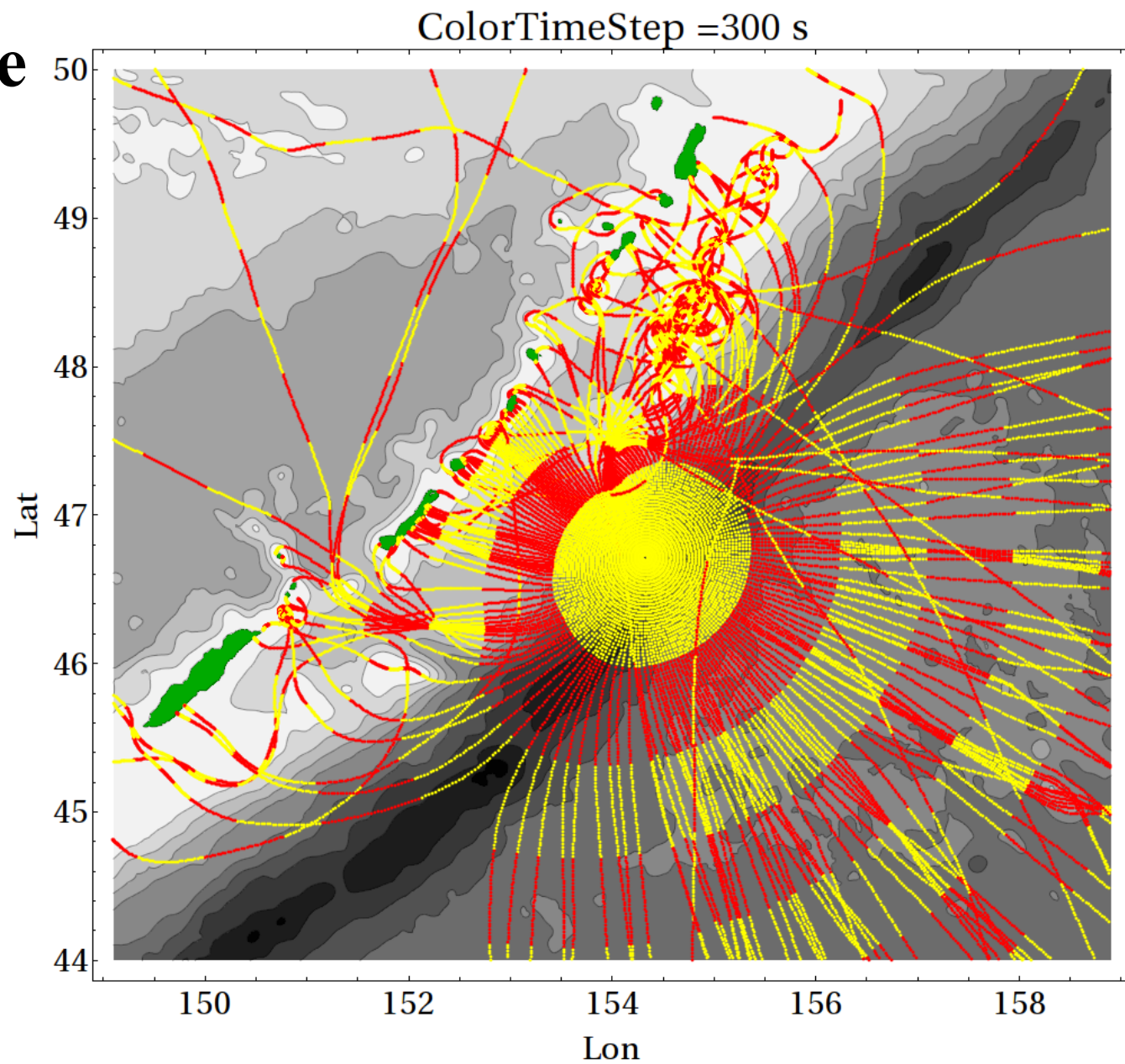
Ход ВОЛНОВЫХ лучей вблизи ПОДВОДНОГО хребта



Тохоку
11.03.2011

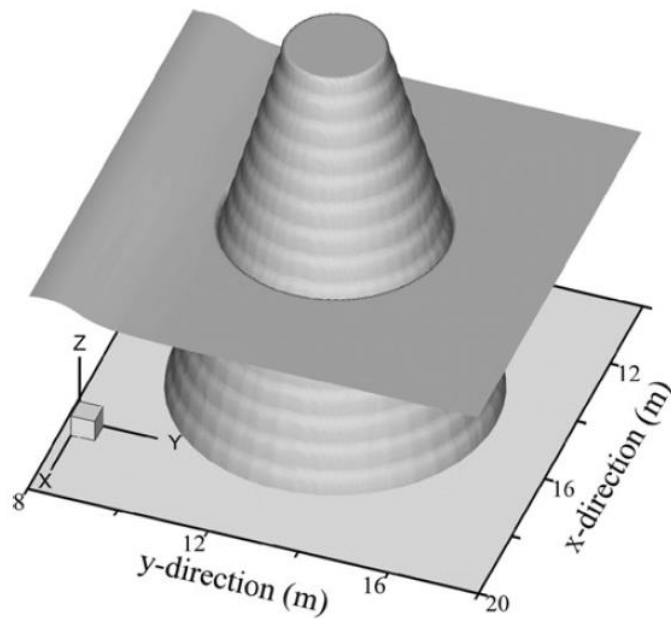


**Центральные
Курилы
15.11.2006**

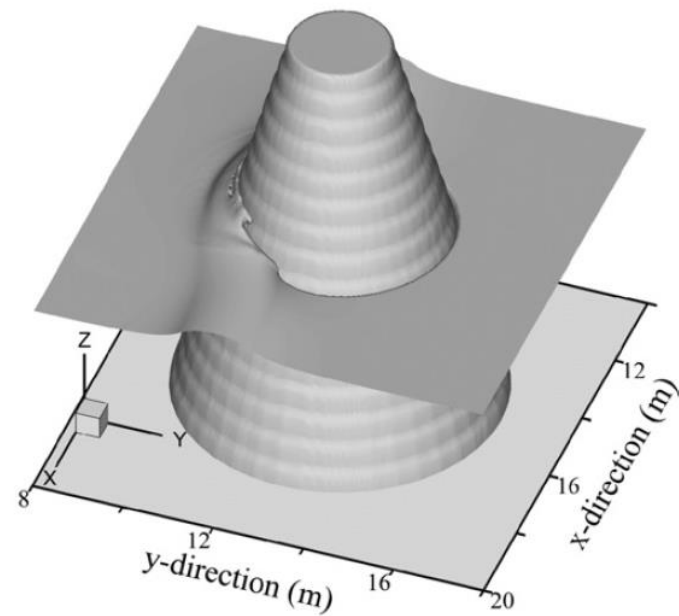


Базовые свойства волн

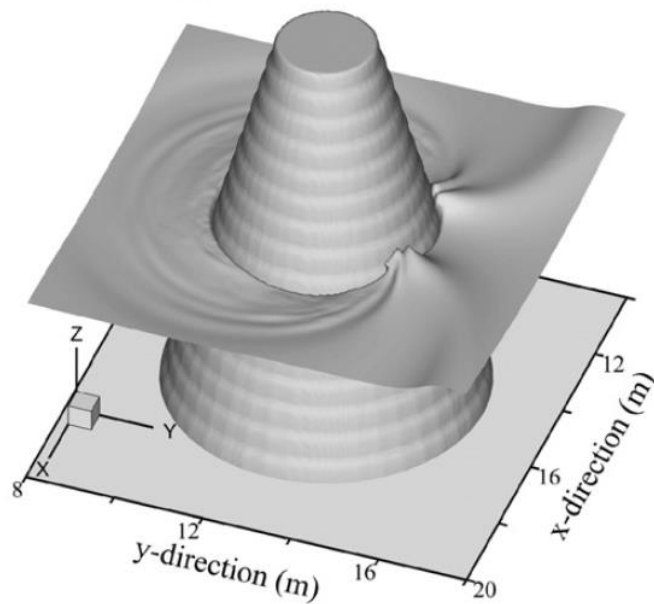
- Дисперсия
- Рефракция (преломление)
- Дифракция (огибание препятствий)



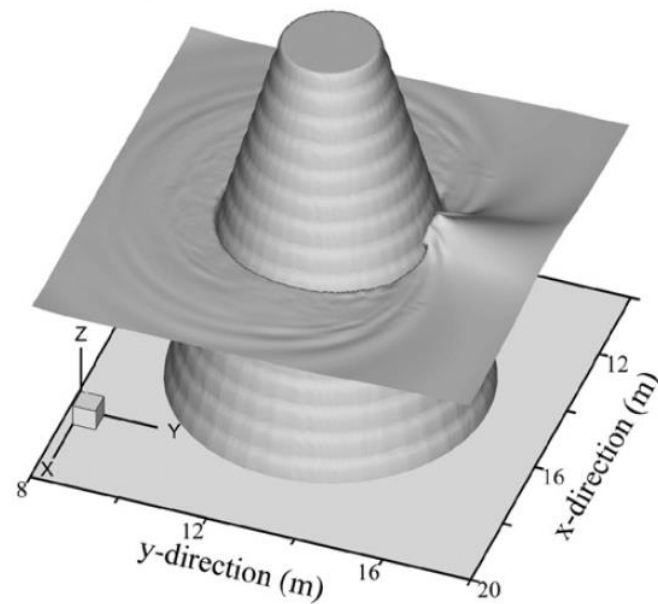
(a) $t = 7.0$ sec



(b) $t = 9.0$ sec



(c) $t = 12.0$ sec



(d) $t = 13.0$ sec

Генерация волн неоднородностями атмосферного давления (метеоцунами)

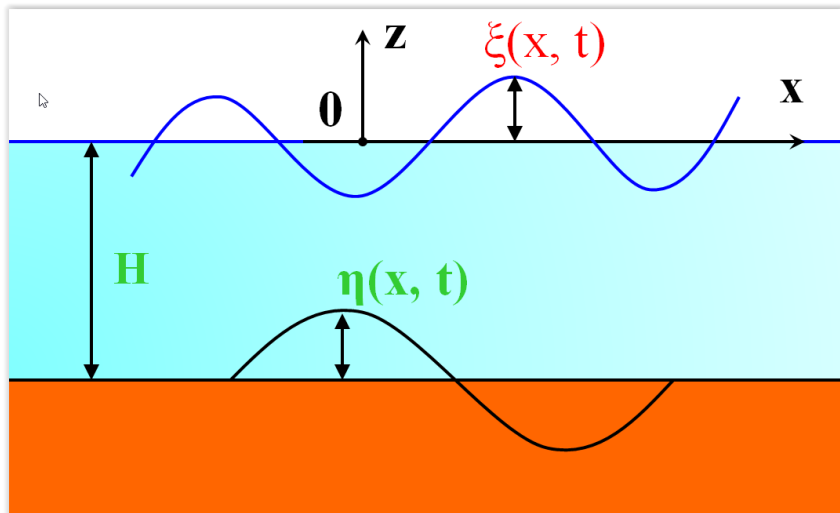
Математические подходы

III. Дифференциальные уравнения в частных производных

ищем функцию от **двух** переменных $\xi(x, t)$ – зависимость смещения поверхности воды от координаты и времени

Уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} - gH \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2}$$



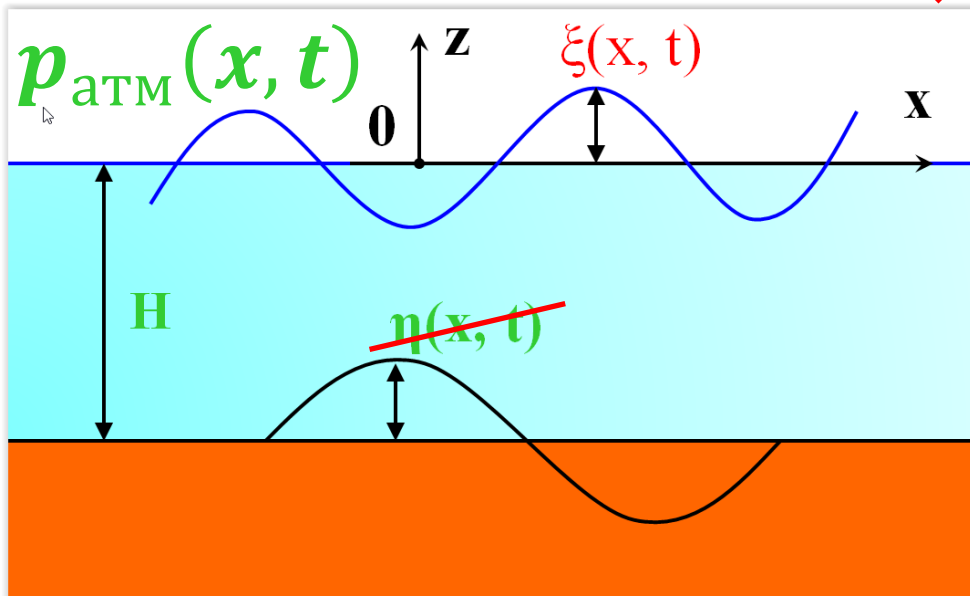
Математические подходы

III. Дифференциальные уравнения в частных производных

ищем функцию от **двух** переменных $\xi(x, t)$ – зависимость смещения поверхности воды от координаты и времени

Уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} - gH \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \cancel{\eta(x, t)}}{\partial t^2} = \frac{H}{\rho} \frac{\partial^2 p_{\text{атм}}(x, t)}{\partial t^2}$$



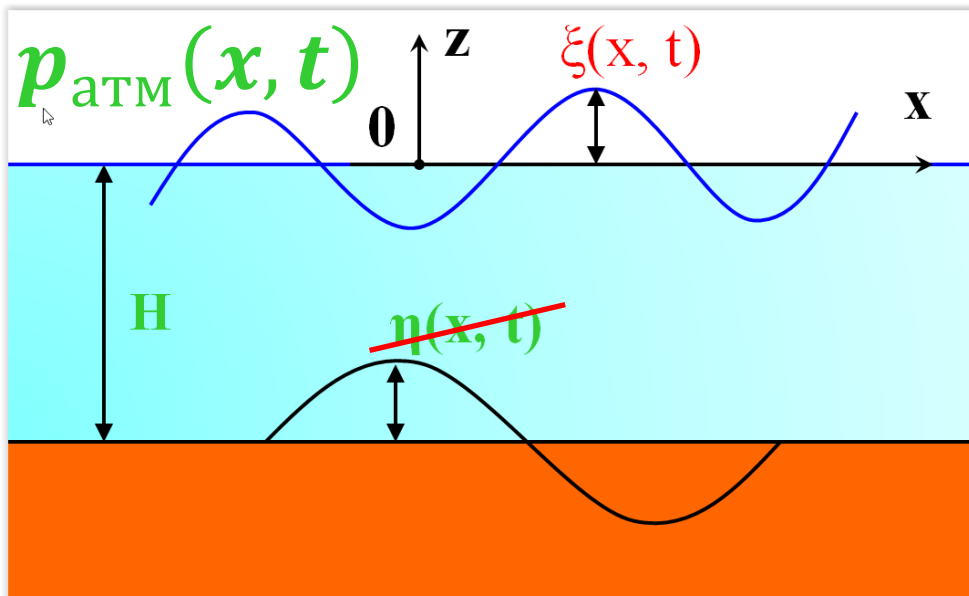
Математические подходы

III. Дифференциальные уравнения в частных производных

ищем функцию от **двух** переменных $\xi(x, t)$ – зависимость смещения поверхности воды от координаты и времени

Его решение:

$$\xi(x, t) = \frac{H / \rho}{v^2 - c^2} f(x - vt)$$



$$p_{\text{атм}}(x, t) = f(x - vt)$$

Математические подходы

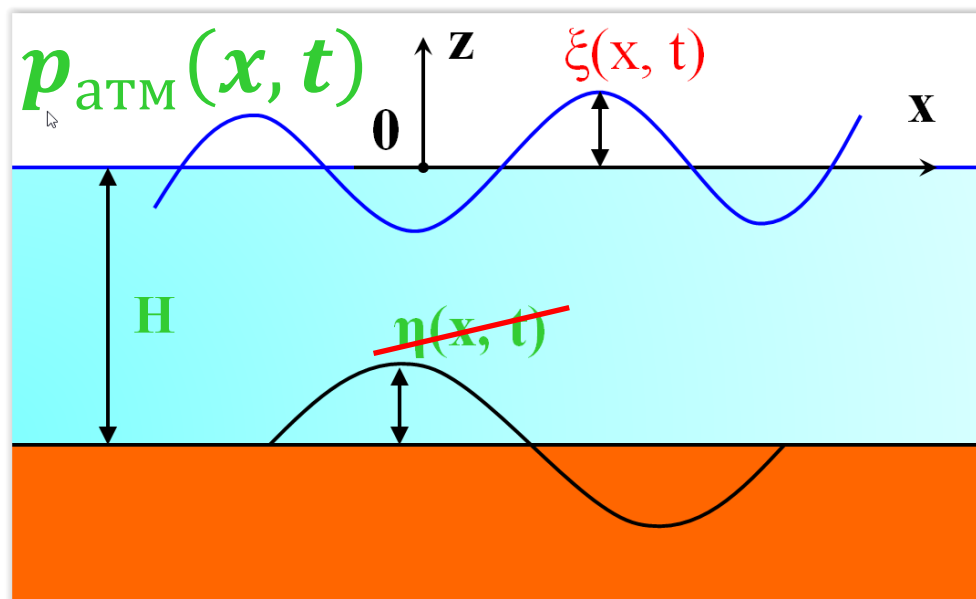
III. Дифференциальные уравнения в частных производных

ищем функцию от **двух** переменных $\xi(x, t)$ – зависимость смещения поверхности воды от координаты и времени

Его решение:

$$\xi(x, t) = \frac{H / \rho}{v^2 - c^2} f(x - vt)$$

Амплитуда и знак (!)
возмущения на
поверхности воды
определяются
соотношением
скоростей «v» и «с»



$$p_{\text{атм}}(x, t) = f(x - vt)$$

Точность и сложность математического описание волн цунами напрямую зависит от выбранного физического приближения

- амплитуда волн мала/значительна
- длина волн больше/сопоставима с глубиной
- учитываем/не учитываем вращение Земли
- вязкая/невязкая жидкость
- сжимаемая/несжимаемая жидкость
- однородная/неоднородная жидкость
- учитываем или нет прогиб земной коры под волной цунами и искривление гравитационного поля
-
-

Спасибо за внимание!!!

